V　（解説）「行列」の意味と内容

§ 1　行列の定義と用語

次のように，数を矩形に並べたものを，行列（マトリックス，matrix）といいます。

行列をしめすときには，矩形にならべた数の両側に，次のように括弧〔 〕あるいは（ ）をつけます。また，この行列をつくっている１つ１つの数は，この行列の要素（element）といいます。

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

上にしめしたのは要素がすべて常数からなる行列ですが，行列の要素は常数とはかぎらず，変数であってもよいのです。

たとえば，変数 u, v, w, x, y, z からなる行列，

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

や，また常数 a, b, c, d, e, f と変数 x, y, z からなる行列，

$$\begin{pmatrix} a & x & d \\ b & y & e \\ c & z & f \end{pmatrix}$$

などもかんがえられます。

行列の矩形にならんでいる数の，横のならびを行（row），縦のならびを列（column）といい，それぞれ上および左から第１行，第２行あるいは第１列，第２列というように呼びます。

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \cdots\cdots 第1行 \\ \cdots\cdots 第2行 \\ \cdots\cdots 第3行 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 第1列 & 第2列 & 第3列 & 第4列 \end{array} & \end{array}$$

ある行列の行および列の数がそれぞれ m および n であるとき，この行列を（ m ，n ）型行列であるといいます。したがって上にしめした行列は（ 3 ，4 ）型行列です。

行列を１個の文字で表わすことがあります。そのときは普通Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄなどの英語の大文字をもちいます。そして，その要素については，次のような表現方法をとります。たとえば，行列Ａの第ｉ行，第ｊ列の位置にある要素は，Ａの小文字ａをもちいて，

$$a_{ij}$$

としめすのです。そして，これを行列Ａの（ｉ，ｊ）要素といいます。したがって，いまこの行列Ａが（ｍ，ｎ）型行列ならば，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots\cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

となります。

また行列Ａを，(a_{ij}) と表わすこともあります。

なお，ある行列が別の若干の行列を組合わせてつくられているとみなせる場合があります。たとえば，次にしめす行列Ａ，

$$A = \begin{pmatrix} a & x & d & u \\ b & y & e & v \\ c & z & f & w \\ \alpha & X & \lambda & U \\ \beta & Y & \mu & V \end{pmatrix}$$

は，別の４個の行列 A_1, A_2, A_3, A_4，

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} d & u \\ e & v \\ f & w \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & X \\ \beta & Y \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} \lambda & U \\ \mu & V \end{pmatrix}$$

の組合わせと見ることができるでしょう。

このような場合，行列Ａを，

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

と表わすことがあります。そして行列 A_1，A_2，A_3，A_4 を行列Ａの部分行列（submatrix）と呼びます。

§ 2　特別な形の行列

行列はその形によっていろいろの名称がつけられていますが，次にとくに重要な正方行列およびベクトルなどについて説明します。

1. 正 方 行 列

行および列の数(カズ)が等しく，したがって要素が正方形に並んでいる行列を，正方行列 square matrix）といいます。

ある正方行列が（ m , m ）型行列のとき，これをm次の正方行列という場合もあります。この正方行列のうちには，その形から，次のような特別の名称で呼ばれているものがあります。

(1) 対 角 行 列

次のように，左上より右下にいたる対角線上の要素を残して，他の要素がすべて0のものを，対角行列（diagonal matrix）といいます。対角線上の要素のうちに，0のものがあってもかまいません。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 単 位 行 列

対角行列で，対角線上の要素がすべて1のものを単位行列（unit matrix)といいます。この行列は通常Eまたは I で表わされます。なお，この名称の由来はあとで行列の掛け算のところで明らかにされます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 対 称 行 列

ある行列の（ i , j ）要素と（ j , i ）要素が相等しいとき，いいかえると数(スウ)が対角線にたいして対称に配置されているとき，この行列を対称行列（symmetric matrix）といいます。

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & 2 \\ 8 & 5 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2．ベクトル

ただ1行あるいは1列よりなる行列を，とくにそれぞれ行ベクトル（row vector）および列ベクトル（column vector)といいます。次がその例です。

行ベクトル $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

列ベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

なお，すべての要素が1のベクトルは，単位ベクトル（unit vector)といいます。

単位ベクトル $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3．転置行列

ある行列Aの行と列とを入れ換えたもの，すなわち行列Aの（i，j）要素を（j，i）要素とする行列を，元の行列Aの転置行列（transposed matrix）といい，通常これを ${}^{t}A$ あるいは簡単に A' とあらわします。したがって，Aが（m，n）型行列であれば，A' は（n，m）型行列です。たとえば，次のようになります。

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

4．零行列

構成するすべての要素が0の行列を，零行列（zero matrix)といいます。零行列は，通常単にOと表わします。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§3　行列の加減乗除(1)——加減算

行列の加減乗除にはいろいろの約束がありますから，とくにそのような点に注意してください。行列の足し算・引き算は，型の等しい行列すなわち行および列の数(カズ)がそれぞれ相等しい行列のあいだでおこなわれます。

ある行列Aに別の行列Bを足すとは，この2個の行列の（ i ，j ）要素の和，すなわち（ $a_{ij}+b_{ij}$)を（ i ，j ）要素とする行列をつくることをいい，これをA＋Bと表わします。同様に，ある行列Aから別の行列Bを引くとは，この2個の行列の（ i ，j ）要素の差，すなわち（ $a_{ij}-b_{ij}$)を（ i ，j ）要素とする行列をつくることをいい，これをA－Bと表わします。たとえば，AおよびBを，

$$A=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 5 & 4\\ 7 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 8\\ 4 & 6\end{pmatrix}$$

とすれば，A＋BおよびA－Bは次のようになります。

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & 14\\ 6 & 12\\ 11 & 6\end{pmatrix}\qquad A-B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & -4\\ 3 & -6\end{pmatrix}$$

§4　行列の加減乗除(2)――乗算

行列の掛け算では，掛けられる方の行列の列の数(カズ)と，掛ける方の行列の行の数(カズ)とが等しいことが必要です。それゆえ，いまある行列Aに別の行列Bを掛けることとし，Aを（ l ，m ）型行列，Bを（ m ，n ）型行列とします。

さて，行列Aに行列Bを掛けるとは，次の数値

$$\sum_{s=1}^{m} a_{is}\cdot b_{sj}$$

を，その（ i ，j ）要素とする行列をつくることをいい，これをA×BあるいはABと表わします。この計算は複雑なので，すこし説明を補足します。

まず，行列Aの第 i 行の要素と，行列Bの第 j 列の要素とを取り出します。

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm}\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \longleftarrow \text{第 i 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

$$
B = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} \cdots\cdots & b_{1j} \cdots\cdots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} \cdots\cdots & b_{2j} \cdots\cdots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_{m1} & b_{m2} \cdots\cdots & b_{mj} \cdots\cdots & b_{mn}
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccc} \phantom{b_{11}} & \phantom{b_{12}\cdots\cdots} & \uparrow\ \text{第}\ j\ \text{列} & \phantom{b_{1n}} \end{array}
\end{array}
$$

この双方からとり出されてくる要素の数は等しいわけですが，これを次のように順次掛けあわせて，かつそれを合計します。

$$
\begin{array}{ccccccc}
\text{行列A} & & \text{行列B} & & & & \\
a_{i1} & \times & b_{1j} & = & a_{i1} & \cdot & b_{1j} \\
a_{i2} & \times & b_{2j} & = & a_{i2} & \cdot & b_{2j} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{im} & \times & b_{mj} & = & a_{im} & \cdot & b_{mj} \\
\hline
 & & & & \multicolumn{3}{c}{\sum_{s=1}^{m} a_{is} \cdot b_{sj}}
\end{array}
$$

そして，ここにえられた数値を（ i ， j ）要素とする行列をつくれば，それがA×Bです。この説明からすぐわかるように，えられるのは（ l ， n ）型行列です。

たとえば，AおよびBを，

$$
A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}.
$$

とすれば，

$$
A \times B = \begin{bmatrix} 8 & 28 & 60 & 100 \\ 4 & 11 & 18 & 26 \\ 6 & 21 & 45 & 75 \end{bmatrix}
$$

となります。ここで，たとえば（ 2 ， 3 ）要素１８の計算は，次のようにおこなわれます。

$$
18 = (2 \times 7) + (1 \times 4)
$$

この例からわかるように，AにBを掛けることはできても，必ずしもBにAを掛けることができるとはかぎりません。AとBとが交互に掛けられるためには，Aの行および列の数が，それぞれBの列および行の数と等しいことが必要です。

AおよびBがともに正方行列のとき，A×BもB×Aも型の等しい正方行列となりますが，これは必ずしも等しいとはかぎりません。

たとえば，Ａ，Ｂを，

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

としたとき，Ａ×ＢおよびＢ×Ａはそれぞれ次のようになります。

$$A \times B = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \qquad B \times A = \begin{bmatrix} 18 & 21 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

通常の数（スウ）の場合は，たとえば，３に７を掛けることと７に３を掛けることとは相等しく，

$$3 \times 7 = 7 \times 3$$

というように，交換の法則が常に成り立ちますが，行列の場合は，この法則は必ずしも成立するとはかぎらないのです。もちろん成立するときもあることはあります。

行列の掛け算が，通常の数（スウ）の掛け算と一番異なる点は，この交換の法則が成り立たないことです。したがって，われわれは掛け算をおこなう場合，掛ける順序に注意する必要があります。Ａを任意の行列とするとき，次の式が常に成り立ちます。

$AE = A$，$EA = A$　ただし，Ｅは単位行列とする。

もちろん，この単位行列Ｅは，掛け算がおこなえるように，適当にその型すなわち行および列の数をさだめてやる必要があります。なお，行列の掛け算では，結合の法則および分配の法則が成り立ちます。すなわち行列Ａ，Ｂ，Ｃにたいして，次の式が成り立ちます。

結合法則　$(AB)C = A(BC)$

分配法則　$A(B \pm C) = AB \pm AC$，$(B \pm C)A = BA \pm CA$

もちろん，このように書いても，この３個の式中の行列Ａ，Ｂ，Ｃが共通であるというわけではありません。Ａ，Ｂ，Ｃは，それぞれの式における演算ができるようなものであればよいのです。これらの式は，上に述べた加，減，乗算における約束から導き出せるのですが，これはすこし煩雑なので省きます。

§５　行列の加減乗除(3)——除算

行列の割り算には，非常に複雑な制約がある上，厳密に理解するには，行列式への理解が必要です。しかし，行列式の説明は簡単にできないので，それは省略します。

ある行列Ａで別の行列Ｂを割るとは，次の式，

$$\left.\begin{aligned} AX &= B \\ YA &= B \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

を満足するような行列ＸあるいはＹをもとめることをいいます。なお，ＸおよびＹをもとめることを，それぞれ左除法および右除法といいます。

掛け算の定義から明らかなように，行列Xをもとめるには，行列AおよびBの行の数が等しい必要があります。同様に，行列Yをもとめるには，行列AおよびBの列の数が等しい必要があります。したがって，行列XとYとをともにもとめるには，行列AとBの型が等しくなければなりません。

割り算のし方の基本の方針を，(1)の第1式について説明すると，まず次の式，

$$PA = E \cdots\cdots (2)$$

を満足するような行列Pをもとめます。もとめられたならば，これを(1)の第1式の左から掛けてやると，

$$P(AX) = PB$$

左辺 $P(AX) = (PA)X = EX = X$

右辺 PB

となり，したがって，Xは，

$$X = PB \cdots\cdots (3)$$

として，もとめられることになります。同様にして，第2式については，

$$AQ = E \cdots\cdots (4)$$

を満足するような行列Qをもとめ，もとめられたならば，これを第2式の右から掛けることによって，Yは，

$$Y = BQ \cdots\cdots (5)$$

とさだめることができます。このPおよびQを，それぞれ行列Aの左逆行列（left inverse matrix）および右逆行列（right in verse matrix）といいます。

行列の割り算は，行列Aが正方行列であるか否かによって，取扱い方が非常に違うので，わけて説明します。

1．行列Aが正方行列である場合

一般に，左逆行列Pと右逆行列Qとがともにもとめられ（注1），かつ，

$$P = Q \cdots\cdots (6)$$

となります。それゆえ，この場合はこれらを行列Aの逆行列（inverse matrix）といい，A^{-1} とあらわします。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} A^{-1}A &= E \\ AA^{-1} &= E \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (7)$$

たとえば，AおよびBを，

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば，Aの逆行列A^{-1}は（注２），

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{\triangle 11}{32} & \frac{\triangle 1}{8} & \frac{13}{32} \\ \frac{57}{128} & \frac{3}{32} & \frac{\triangle 47}{128} \\ \frac{\triangle 5}{32} & \frac{1}{8} & \frac{3}{32} \end{bmatrix}$$

ですから，Xは，

$$X=A^{-1}\ B=\begin{bmatrix} \frac{\triangle 111}{32} & \frac{5}{8} & 0 & \frac{\triangle 39}{16} \\ \frac{517}{128} & \frac{1}{32} & \frac{1}{4} & \frac{189}{64} \\ \frac{\triangle 1}{32} & \frac{3}{8} & 1 & \frac{\triangle 9}{16} \end{bmatrix}$$

となります。Yはもとめられません。なお，△はマイナスをしめします。

（注１）　行列Aからつくった行列式｜A｜が，｜A｜≒0である場合にかぎります。

｜A｜＝0である場合は，逆行列A^{-1}はもちろん左逆行列Pあるいは右逆行列Qももとめられません。なお，（注４）参照。

（注２）　付録Ｐ５８参照。

２．行列Aが正方行列でない場合

一般に，行列Aの行の数（カズ）が列の数（カズ）より大きければ，左逆行列Pだけがもとめられます。（注３）逆に，行列Aの行の数が列の数より小さければ，右逆行列Qだけがもとめられます。しかし，ここで奇妙なことに，左逆行列Pがもとめられるときには，一般に行列Xはもとめられず（注４），その代わりにYがもとめられ，また逆に右逆行列Qがもとめられるときには，一般に行列Yはもとめられず，その代わりにXがもとめられるのです。

たとえば，AおよびBを，

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 7 \\ 7 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

とすれば，Aについては，左逆行列Pだけもとめられて，

$$P=\begin{bmatrix} \frac{47}{321}+\frac{\triangle 33}{107}p_{14} & \frac{\triangle 4}{107}+\frac{\triangle 28}{107}p_{14} & \frac{14}{321}+\frac{\triangle 3}{107}p_{14} & p_{14} \\ \frac{43}{321}+\frac{\triangle 33}{107}p_{24} & \frac{10}{107}+\frac{\triangle 28}{107}p_{24} & \frac{\triangle 35}{321}+\frac{\triangle 3}{107}p_{24} & p_{24} \\ \frac{\triangle 62}{321}+\frac{\triangle 33}{107}p_{34} & \frac{3}{107}+\frac{\triangle 28}{107}p_{34} & \frac{43}{321}+\frac{\triangle 3}{107}p_{34} & p_{34} \end{bmatrix}$$

となります。ここで，p_{14}，p_{24}，p_{34} は任意にとることができます。しかし，このようにPが存在するにもかかわらず，Xはもとめられません。すなわち，ＰＢを計算してみると，

$$PB=\begin{bmatrix} \frac{319}{321}+\frac{31}{107}p_{14} & \frac{166}{321}+\frac{316}{107}p_{14} & \frac{289}{321}+\frac{\triangle 360}{107}p_{14} \\ \frac{326}{321}+\frac{31}{107}p_{24} & \frac{\triangle 94}{321}+\frac{316}{107}p_{24} & \frac{401}{321}+\frac{\triangle 360}{107}p_{24} \\ \frac{\triangle 373}{321}+\frac{31}{107}p_{34} & \frac{143}{321}+\frac{316}{107}p_{34} & \frac{\triangle 190}{321}+\frac{\triangle 360}{107}p_{34} \end{bmatrix}$$

となり，(1)の第１式に入れてわかるように，これはＸではありません。ところが，この場合，右逆行列Ｑはもとめられないにもかかわらず，Ｙはもとめられて，

$$Y=\begin{bmatrix} \frac{\triangle 19}{321}+\frac{\triangle 33}{107}y_{14} & \frac{13}{107}+\frac{\triangle 28}{107}y_{14} & \frac{329}{321}+\frac{\triangle 3}{107}y_{14} & y_{14} \\ \frac{\triangle 359}{321}+\frac{\triangle 33}{107}y_{24} & \frac{26}{107}+\frac{\triangle 28}{107}y_{24} & \frac{337}{321}+\frac{\triangle 3}{107}y_{24} & y_{24} \\ \frac{19}{107}+\frac{\triangle 33}{107}y_{34} & \frac{68}{107}+\frac{\triangle 28}{107}y_{34} & \frac{\triangle 8}{107}+\frac{\triangle 3}{107}y_{34} & y_{34} \\ \frac{251}{321}+\frac{\triangle 33}{107}y_{44} & \frac{31}{107}+\frac{\triangle 28}{107}y_{44} & \frac{\triangle 55}{321}+\frac{\triangle 3}{107}y_{44} & y_{44} \end{bmatrix}$$

となります。（注５）式中の y_{14}，y_{24}，y_{34}，y_{44} は任意にとることができます。このように，いろいろと制約があるため行列Ａが正方行列でない場合の割り算では，十分の検討を必要とします。

（注３）　行列Ａが（ｌ，ｍ）型（ｌ＞ｍ）であるとすれば，ランクがｍである場合にかぎります。ランクがｍより低い場合はもとめられません。なお（注４）参照。

（注４）　行列Ａのランクと，行列Ａに行列Ｂの任意の一列をつけ加えてつくった行列のランクとが等しいときだけ，行列Ｘはもとめられます。

同様に，行列Ａのランクと，行列Ａに行列Ｂの任意の１行をつけ加えてつくった行列のランクが等しいときだけ，行列Ｙはもとめられます。（いずれも必要十分条件）

（注５）　行列ＡおよびＹを，それぞれ次のように２個の部分行列からなっているとかんがえます。

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ \\ A_2 \end{bmatrix} \qquad A_1=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 7 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad A_2=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \quad Y_1=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} \end{bmatrix} \qquad Y_2=\begin{bmatrix} y_{14} \\ y_{24} \\ y_{34} \\ y_{44} \end{bmatrix}$$

これらの関係を(1)の第２式の左辺に入れると，

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= YA \\ &= [Y_1\ Y_2]\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix} \\ &= Y_1A_1 + Y_2A_2\end{aligned}$$

となります。したがって(1)の第２式は，　$Y_1A_1 + Y_2A_2 = B$

となります。いま両辺にA_1の逆行列A_1^{-1}を右から掛けて整頓すると（A_1は，（注１）の条件を満たすとします。なお，（注４）参照），Y_1は，

$$Y_1 = (B - Y_2A_2)A_1^{-1}$$

ともとめられます。したがって，Ｙは，

$$Y = [(B - Y_2A_2)A_1^{-1}\ Y_2]$$

となります。A_1の逆行列A_1^{-1}をもとめると（付録Ｐ５８参照），

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{47}{321} & \frac{\triangle 4}{107} & \frac{14}{321} \\ \frac{43}{321} & \frac{10}{107} & \frac{\triangle 35}{321} \\ \frac{\triangle 62}{321} & \frac{3}{107} & \frac{43}{321}\end{bmatrix}$$

ですから，Ｙは結局前記のようになります。

§６　行列と数（スウ）との乗算

行列と数（スウ）とのあいだには，掛け算だけがかんがえられています。もっとも，ある行列をある数（スウ）で割るとは，その逆数を掛けるということですから，これは，割り算ですけれども，おこなうことができます。

さて，ある行列Ａとある数ｋとの掛け算とは，行列Ａの各要素に数（スウ）ｋを掛けることをいい，これをｋＡあるいはＡｋと表わします。したがって，

$$kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$$

となります。たとえば，いまＡおよびｋを，

$$A = \begin{bmatrix}4 & 2 & 8 & 6\\1 & 5 & 3 & 4\\2 & 9 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$k = 2$$

とすれば，

$$kA = \begin{bmatrix}8 & 4 & 16 & 12\\2 & 10 & 6 & 8\\4 & 18 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

となり、また，$k = 1/2$ とすれば，

$$kA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0.5 & 2.5 & 1.5 & 2 \\ 1 & 4.5 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

となります。

§7　部分行列による乗算

2個の行列AおよびBを，部分行列の組合わせとして，

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\mu} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{\lambda 1} & A_{\lambda 2} & \cdots & A_{\lambda\mu} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1\nu} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{\mu 1} & B_{\mu 2} & \cdots & B_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

とあらわした場合，もしも任意の $j=1,2,\cdots\cdots,\mu$ にたいして，部分行列 A_{ij} の列の数(カズ)と部分行列 B_{jk} の行の数(カズ)が相等しければ，この2個の行列AおよびBの部分行列を普通の要素のようにみて，これらに部分行列による行列の掛け算をおこなえることは明らかでしょう。そこで，いまそのような部分行列による掛け算をおこなってえられる行列をCとし，

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1\nu} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{\lambda 1} & C_{\lambda 2} & \cdots & C_{\lambda\nu} \end{bmatrix}$$

としてみます。ここで，

$$C_{ik} = \sum_{s=1}^{\mu} A_{is} B_{sk} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\cdots\cdots\cdots,\lambda \\ k = 1,2,\cdots\cdots\cdots,\nu \end{array}$$

となることは明らかです。

しかるに，このような部分行列による掛け算をおこなってえられた行列Cは，行列AおよびBに本来の掛け算をほどこしてえられる行列と相等しいのです。すなわち，AB＝Cです。これは行列の有するいちじるしい性質です。たとえば，AおよびBを，

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 & 9 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

とし，またこれを部分行列をもちいて，次のように表わしたとしましょう。

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A_{11} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} & A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & A_{22} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} B_{11} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} & B_{12} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} & B_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix} \end{cases}$$

まず，部分行列によって表わした場合について，部分行列による掛け算をおこなってみると，次のようなCがえられます。

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} C_{11} = \begin{bmatrix} 96 & 30 \\ 57 & 21 \end{bmatrix} & C_{12} = \begin{bmatrix} 66 & 96 \\ 27 & 48 \end{bmatrix} \\ C_{21} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \end{bmatrix} & C_{22} = \begin{bmatrix} 9 & 22 \end{bmatrix} \end{cases}$$

たとえば，C_{12} は，

$$\begin{aligned} C_{12} &= A_{11}\ B_{12} + A_{12}\ B_{22} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 63 & 89 \\ 21 & 34 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 66 & 96 \\ 27 & 48 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と計算されます。次に，AおよびBについて本来の掛け算をほどこしてみると，その結果は，

$$AB = \begin{bmatrix} 96 & 30 & 66 & 96 \\ 57 & 21 & 27 & 48 \\ 11 & 13 & 9 & 22 \end{bmatrix}$$

となります。

したがって，AB＝Cとなることは明らかです。

この証明は，さきに述べた加，乗算の約束から導き出されるのですが，すこし煩雑なので省略します。

§ 8　連立１次方程式

行列をもちいて，連立１次方程式を表わしてみます。連立１次方程式は，この記法を生んだ根源ですから，この項および次項の説明を通じて，行列の使用法を具体的に理解されるのではないかと思います。

連立１次方程式の一般形式をしめすと，次のとおりです。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n + b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n + b_m = 0 \end{cases}$$

ここでｘが未知数をしめします。なお，方程式の数がｍで，未知数の数がｎであるところに注意して下さい。両者は必ずしも一致しないでよいのです。この連立１次方程式が，行列をもちいて，次のように表わせることは明らかでしょう。

$$AX + B = O \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

ただし，ここで，A，X，B，Oは次のような行列です。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

たとえば，次の連立１次方程式，

$$\begin{cases} 0.71x_1 + 1.51x_2 + 8.33x_3 - 5.12 = 0 \\ 7.77x_1 + 5.52x_2 - 2.12x_3 - 0.82 = 0 \\ 4.42x_1 + 5.57x_2 + 1.62x_3 + 6.73 = 0 \end{cases}$$

は，行列をもちいて，次のように表わされます。

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 0.71 & 1.51 & 8.33 \\ 7.77 & 5.52 & \triangle 2.12 \\ 4.42 & 5.57 & 1.62 \end{pmatrix}} \overset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} + \overset{B}{\begin{pmatrix} \triangle 5.12 \\ \triangle 0.82 \\ 6.73 \end{pmatrix}} = \overset{O}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

§9　連立1次方程式の解法（未知数の数と方程式の数とが等しい場合）

未知数の数と方程式の数とが等しい場合には，(8)式の行列Aは，当然正方行列となります。そこで，(8)式の両辺に行列Aの逆行列A^{-1}を左から掛けて，

$$A^{-1}AX + A^{-1}B = A^{-1}O$$

とし，整頓すると，$X + A^{-1}B = O$となり，したがって，$X = -A^{-1}B$　となります。これが未知数の数と方程式の数とが等しい場合の連立1次方程式の解法です。

たとえば，前項の例で，Aの逆行例A^{-1}をもとめますと（注6），

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.14944 & 0.31654 & \triangle\, 0.35421 \\ \triangle\, 0.15814 & \triangle\, 0.25688 & 0.47698 \\ 0.13598 & 0.01959 & \triangle\, 0.05627 \end{pmatrix}$$

となりますから，Xは，

$$X = -A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3.40853 \\ \triangle\, 4.23039 \\ 1.09098 \end{pmatrix}$$

ともとめられます。

$$\begin{cases} x_1 = 3.41 \\ x_2 = \triangle\, 4.23 \\ x_3 = 1.09 \end{cases}$$

（注6）　付録P58参照。

〔付録〕　　　　正方行列の逆行列の計算法

正方行列の逆行列の計算例

0.71	1.51	8.33	1		
7.77	5.52	△ 2.12	0		
4.42	5.57	1.62	0		
△ 1	0	0	0		
*	5.52	△ 2.12	0		
△ 10.94366	△ 16.52493	△ 91.16069	△ 10.94366		
*	5.57	1.62	0		
△ 6.22535	△ 9.40028	△ 51.85717	△ 6.22535		
*	0	0	0		
1.40845	2.12676	11.73239	1.40845		
	△ 11.00493	△ 93.28069	△ 10.94366	1	
	△ 3.83028	△ 50.23717	△ 6.22535	0	
	2.12676	11.73239	1.40845	0	
	△ 1	0	0	0	
	*	△ 50.23717	△ 6.22535	0	
	△ 0.348051	32.46644	3.80895	△ 0.34805	
	*	11.73239	1.40845	0	
	0.193255	△ 18.02696	△ 2.11492	0.19326	
	*	0	0	0	
	△0.0908684	8.47627	0.99443	△ 0.09087	
		△ 17.77073	△ 2.41640	△ 0.34805	1
		△ 6.29457	△ 0.70647	0.19326	0
		8.47627	0.99443	△ 0.09087	0
		△ 1	0	0	0
		*	△ 0.70647	0.19326	0
		△ 0.354210	0.85591	0.12328	△ 0.35421
		*	0.99443	△ 0.09087	0
		0.476979	△ 1.15257	△ 0.16601	0.47698
		*	0	0	0
		△0.0562723	0.13598	0.01959	△ 0.05627
			0.14944	0.31654	△ 0.35421
			△ 0.15814	△ 0.25688	0.47698
			0.13598	0.01959	△ 0.05627

ここで，正方行列の逆行列の計算方法の１つをしめしたいとおもいます。この計算では，次の正方行列Ａの逆行列の計算がおこなわれています。

$$A = \begin{pmatrix} 0.71 & 1.51 & 8.33 \\ 7.77 & 5.52 & \triangle\, 2.12 \\ 4.42 & 5.57 & 1.62 \end{pmatrix}$$

この計算例の計算手順は，次のとおりです。

1. まず行列Ａを計算表の最上部に書き入れます。
2. この行列Ａの下と右に，１行１列を加え（4.4）型行列とします。そして，計算表にしめすように（1,4）要素は＋１，（4,1）要素は△１とし，その他は全部０とします。
3. ここに，新しくつくられた（4,4）型行列の第１行および第１列をのぞいたものを，そのままその下の各欄に書き入れます。
4. さらに，この（4,4）型行列において，（1,1）要素でもって，第１列の他の要素を除し，その結果にマイナスをつけて，すぐ下の＊印の欄に記入します。

   たとえば，

$$\triangle\ 10.94366 = \triangle\ \frac{7.77}{0.71}$$

5. ＊印の各欄の数値を，上の（4.4）型行列の第１行の第２列以下の要素に乗じ，えられた結果をその数値の右の欄に順に記入します。

   たとえば，　$\triangle\ 16.52493 = \triangle\ 10.94366 \times 1.51$
6. （4,4）型行列の下の各欄に記入された２個の数値を合計して，その結果をさらにその下の欄に記入します。

   たとえば，　$\triangle\ 11.00493 = 5.52 + \triangle\ 16.52493$
7. 以上と同様の手続きを，２から順にくり返します。
8. この操作を３回くり返してえられた３行３列の数値が，そのままもとめる逆行列A^{-1}となります。したがって，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.14944 & 0.31654 & \triangle\ 0.35421 \\ \triangle\ 0.15814 & \triangle 0.25688 & 0.47698 \\ 0.13598 & 0.01959 & \triangle\ 0.05627 \end{pmatrix}$$

   なお，ｎ次の逆行列の計算の場合には，このような操作をｎ回くり返すことになります。
9. 逆行列を計算する場合には，計算からくる誤差の累積を避けるため，相当に桁数を多くして計算する必要があります。したがって，次数が高い時は電子計算機の力が必要です。
10. 正方行列の（1,1）要素が０の場合にも，すこし技巧を加えれば，上記の方法で計算できますが，説明は省略します。