

# 純粋及び混合状態信号に対する量子符号化/復号化の極限特性とその実現に関する研究 (継続-10)

## Quantum gain of coding-decoding process for pure and mixed-state signals

臼田 毅 愛知県立大学 情報科学部  
Tsuyoshi Usuda Aichi Prefectural University

研究期間 平成 13 年度～平成 17 年度

### 概要

本研究では、量子情報通信が技術として確立するために、量子情報理論によって、より実際的な限界が明らかにされるべきであると考えている。現在、世界の量子情報理論研究では、符号長無限（エンタングルメント無限）での極限特性など、人類が遠い将来に手にできるかどうかという究極の限界に関する研究が主流であるが、一方で実験研究は数量子ビット、すなわち符号長 10 以下の技術を地道に磨いており、両者のギャップは極めて大きい。そこで、本研究では、実際に近未来の通信で用いられる有限の符号長において、最大の量子利得をもたらす符号化及び復号化を明らかにすることを目的としている。特に、古典雑音を含む実際的な信号系である混合状態信号に対し、誤り率と情報量という 2 つの量子利得の規準に基づき、具体的な符号化法を明らかにすることを目指している。さらに、これらを実現するため、一般には抽象的な決定作用素で表される、量子復号過程の物理的な対応についても検討する。

### Abstract

The purpose of this study is to close a gap between the present experiment of quantum communications and the theoretical study in which the ultimate goal has been considered when infinite entanglement and infinite length of codeword are assumed. In this research, we clarify quantum gain by coding when the codeword length is finite. In particular, we show a code that has quantum gain with both information and error probability criteria. We consider maximum quantum gain with information criterion and the optimum decoding that minimizes the average probability of error.

### 1. まえがき

本研究は、量子情報理論の構築に向けて諸問題を解決するものである。量子情報理論は、従来の情報理論では予測しえない優れた情報通信システムを予言するとされる。従って、情報理論的な意味での量子利得の詳細を解明することは、量子情報通信のメリットを明確に示すために重要である。この量子利得の符号長無限大での漸近特性は、量子通信路符号化定理として知られているが、有限の符号長で最大どのくらいの量子利得が得られるかは、十分には解明されていない。

本研究では、量子情報通信が技術として確立するために、量子情報理論によって、より実際的な限界が明らかにされるべきであると考えている。したがって、本研究は、実際に通信で用いられる有限の符号長において、最大の量子利得をもたらす符号化及び復号化を明らかにすることを目的とする。特に、古典雑音を含む実際的な信号系である混合状態信号に対し、誤り率と情報量という 2 つの量子利得の規準に基づき、具体的な符号化法を明らかにする。

### 2. 研究内容及び成果

本研究では、符号長無限、無限長の量子ビットのエンタングルメントを要する究極の限界だけでなく、有限の符号長で最大の量子利得をもたらす、量子符号化、復号化を明らかにすることを課題として設定している。実施した主な研究項目は、次の通りである。

- (1) 誤り率及び情報量規準による量子利得の特性解析
- (2) 純粋及び混合状態信号の最適検出・最適復号
- (3) 符号長  $n$  の通信路容量の考察
- (4) エンタングルメントの効果の考察（符号化のエンタングルメントの効果、エンタングルメント援助通信におけるワンショット容量など）

以下項目毎に研究内容及び得られた結果の概略を述べる。

- (1) 誤り率及び情報量規準による量子利得の特性解析
- ・情報量規準での符号化の量子利得特性

M 元線形従属信号に対し、情報量規準での符号化の量子利得、いわゆる量子通信路容量の超加法性に関する基本特性を明らかにした。具体的には、3 元、5 元信号に対し、符号長 2-20 の場合の特性を調査し、従来に示されていた 2 元の結果を大きく上回る量子利得が短い符号長で得られること、信号の数を増やせば大きな量子利得が得られるという、従来予想に反し、3 元信号の利得が 5 元信号の利得よりも大きいという結果を示した。これは、平成 14 年に示された、通信総合研究所（現 NICT）の量子情報技術グループによる、世界初の符号化の量子利得（超加法性）のデモ実験の方向性が正しいことを示すものである。

#### ・誤り率規準での符号化の量子利得特性

従来の符号化の量子利得の研究は、主に情報量規準に関するものであった。これは、通信路容量の超加法性という、量子特有の性質を示すために必要であったが、通信として意味をもつか否かは、誤り率規準での特性を示す必要がある。本研究では、2 元純粋状態信号に対し、古典線形符号を適用することで、量子利得特性を調べた。その結果、符号長に対し、量子利得は増えていく傾向にあることがわかった。また、古典的な性能はやや劣るとされる符号の方が、より量子利得が高いことがわかった。これは、古典的には無視されていた符号でも、量子復号によって、符号語空間を最適に分割すれば、有用な符号となりうる可能性を示唆している。

#### ・2 つの規準で共に量子利得をもつ符号の例示とその特性

従来、情報量を大きくし、超加法性を示すのに有効な符号では、誤り率はむしろ劣化すると予想されていた。本研究では、従来予想に反し、情報量は符号長 1 の通信路容量  $C_1$  より大きくなり、かつ、誤り率が減少する多くの例を示した。また、ほぼ識別不可能な 2 元信号（ほぼ平行な 2 元量子状態）に対し、シンプレックス符号を適用した場合について、情報量と誤り率の特性を調べた。その結果、例えば、情報記号数 45 程度の規模の符号を使うことで、伝送される情報量は、符号長 1 の通信路容量  $C_1$  を超え、かつ、誤り率は  $10^{-5}$  以下とすることが可能であることが

わかった。これは、量子通信路容量の超加法性が、工学的な意味をもつことを明確に示す例となる。また、情報記号数 40 程度で、誤り率を改善しつつ、伝送される情報は、符号長 1 の通信路容量  $C_1$  の 10 倍以上となる場合があることを明らかにした (図 1)。

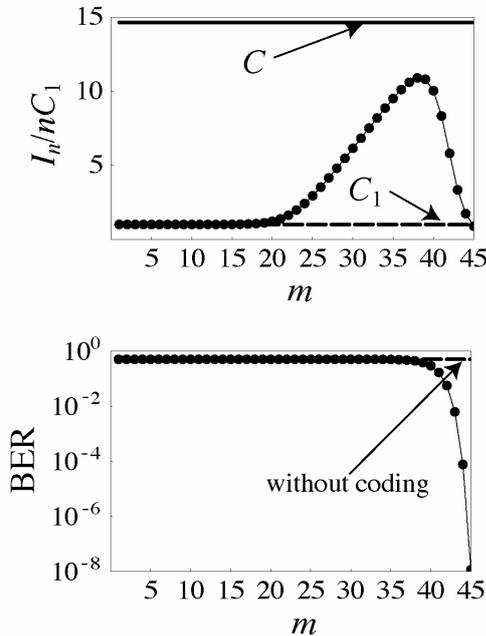


図 1 情報量と誤り率の量子利得特性。  
(横軸は情報記号数で符号の規模を表す)

## (2) 純粋及び混合状態信号の最適検出・最適復号

### ・純粋状態信号に対する最適量子復号の解明

高信頼量子通信のために本質的なのは、誤りのほとんど生じない通信の実現である。本研究では、 $q$  元擬巡回符号に対し、復号誤り率を最小にする最適量子復号を明らかにし、その最適性を解析的に証明した。この結果は、誤り率規準で最大の量子利得をもたらす復号を解明したものといえる。

**定理：** レター状態が、純粋な対称信号であるとき、そのレター状態から構成される  $q$  元擬巡回符号に対し、復号誤り率を最小にする最適量子復号は、Square-root measurement (SRM) である。

### ・混合状態信号に対する最適量子復号の数値解と構造分析

実際に通信で利用されるのは、古典雑音を含む、混合状態信号であるが、その最適復号は、従来、全く知られていなかった。本研究では、スピン 1/2 系における外部磁場による熱平衡状態と 2 元純粋状態信号を 2 元対称通信路に通すことで得られる混合状態の 2 種類について、符号長 6 程度までの最適復号の数値解と、符号長 7 程度までの準最適復号による、誤り率特性を明らかにした。また、最適復号の数値解に基づき、その構造分析を行った。その結果、最適復号の出力結果が明確に分離するコア空間と、オーバーラップのある共通空間へ分割されること、符号の構造が定まれば、量子状態の直交度、古典雑音量によらず、最適復号を分解した際の各部分空間の次元は、同一となることがわかった。

## (3) 符号長 $n$ の通信路容量の考察

情報量規準での最大の量子利得について、定量的に明らかにすることを目的としている。本研究では、ほぼ最大の量子利得とみなせる量に対応するものとして、復号過程を誤り最小復号とした場合に対し、符号語生起確率について最適化した、最大相互情報量を定義し、計算することを目的として研究を進めた。そして、符号長 2 及び 3 の最大

相互情報量を数値的に与えた。従来の研究では、復号過程と符号語生起確率双方に、何らかの制約を与えた場合しか考察されておらず、この結果は、符号語生起確率についてフルに最適化した、初めての例となる。

## (4) エンタングルメントの効果の考察

・記憶のある通信路における量子通信路容量の超加法性  
平成 15 年に、Holevo 容量の超加法性を示唆する初の例が、欧州のグループによって示された。本研究では、欧州のグループの扱ったパウリ通信路ではなく、光系においてより現実的な、減衰通信路等について考察し、量子通信路容量の超加法性の存在を確認した。

・光系におけるエンタングルメントを用いた Shannon 情報伝送のワンショット通信路容量

いわゆる、Entanglement-assisted classical capacity の問題。本研究では、量子通信媒体として有望な光系を考え、かつ、他の研究にある符号長無限、エンタングルメント無限といった究極の特性よりも現実に近い、ワンショットの容量を考察した。エネルギー拘束条件下での減衰通信路において、2 モードスクイズド状態を利用した通信路容量と直交エンタングルメント状態を用いた量子通信路容量との比較を行った。無雑音通信路については、予想通り、直交エンタングルメント状態が大きな容量を生むという結果が得られた。減衰通信路についても、光子数の小さいところの計算を行った限りでは、無雑音通信路と同様の結果が得られた。

## 3. むすび

本研究は、量子情報理論の理論研究であるが、世界の多くの理論研究とは、やや異なる課題に取り組んだ。すなわち、あるいは遠い将来に得られるかもしれない究極の限界は、他の研究でかなり解明されているが、近未来にはどの程度の特性が期待できるのか、現在原理実験を行っている実験研究は、1、2 年後ではなく 5~10 年先に具体的にはどのような課題に取り組むべきか等は、むしろ、理論家が示してこなかったため、理論予測の真空地帯ができあがっていた。本研究では、この隙間を埋めるべく、2 節で説明した (1) ~ (4) の項目について研究を進め、有限の符号長での量子最適復号の解明、量子通信のメリットを明確に示す符号化の確認等の結果を得ることができた。

### 【誌上发表リスト】

- [1] T. S. Usuda, S. Usami, I. Takumi, and M. Hata, "Superadditivity in capacity of quantum channel for  $q$ -ary linearly dependent real symmetric-state signals", *Physics Letters*, vol.A305, pp.125-134, (2002 年 11 月)
- [2] T. Tomari, S. Usami, and T. S. Usuda, "A study on optimum quantum decoding for binary linear codes with mixed letter-states", *Proceedings of 2004 International Symposium on Information Theory and Its Applications*, pp.1429-1434, (2004 年 10 月)
- [3] T. S. Usuda, T. Tomari, and S. Usami, "'Pure' square-root measurement and its optimality for mixed-state signals", *AIP Conference Proceedings*, vol.734, S. M. Barnett, E. Andersson, J. Jeffers, P. Ohberg, and O. Hirota (Eds.), American Institute of Physics, pp.107-110, (2004 年)