

量子測定、量子通信、量子計算における精度、擾乱、情報量、計算量、エンタングルメントの相互関係に関する数理解析的研究（継続-12）

Reciprocity of Noise, Disturbance, Information, Complexity, and Entanglement in Quantum Measurement, Communication, and Computing: A Mathematical Study

小澤 正直 東北大学 大学院情報科学研究科
Masanao Ozawa, Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

日合 文雄[†] 尾畑 伸明^{††}
Fumio Hiai[†] Nobuaki Obata^{††}

[†]東北大学 大学院情報科学研究科 ^{††}東北大学 大学院情報科学研究科
[†]Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
^{††}Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

研究期間 平成 13 年度～平成 17 年度

概要

量子情報理論の数理解析的基礎を研究して、測定精度と擾乱の関係に関する不確定性原理を再検討し、それに基づいて、情報量・エンタングルメント・計算資源などの量子情報特有の情報資源の相互関係とその物理的限界を明らかにすることを目的とする。本研究では当初の計画通り、Heisenberg 以来、多くの教科書に採録された定説を覆す不確定性原理の普遍的な定式化を確立することに成功した。これは量子力学の基礎だけでなく、量子暗号の安全性や量子情報処理の効率にかかわる基本問題でもあり、従来の情報理論にはない、不確定性原理を基本原理とする情報理論を構築する基礎となる。さらに、この普遍的な不確定性原理に基づき、基本計算素子の実現可能性に関わる量子制御の限界を保存法則という極めて一般的な仮定から導く理論的方法を確立して、情報量・エンタングルメント・計算資源の制約を体系的に導く理論を構築した。

Abstract

We have investigated mathematical foundations of quantum information theory, re-examined the uncertainty principle on the noise and disturbance, and elucidated the reciprocity and limitation of quantum information theoretical resources such as information, entanglement, and computational complexity. In particular, we have succeeded to disprove the established theory that many text books have adopted for long time and to establish a universally valid formulation of the uncertainty principle concerning the reciprocity of noise and disturbance in measurement. Based on this new uncertainty principle, we have constructed a general theory of quantum information that systematically leads to the limitations of quantum state control such as measurement, communication, and computing from general physical principles.

1. まえがき

量子力学では、測定が非測定系に不可避な擾乱を引き起こすことが知られているが、1927年に Heisenberg によって提唱された不確定性原理により、測定の精度と不可避な擾乱の大きさの間には反比例の関係があることが定説とされてきた。この関係は当時より、ガンマ線頭微鏡などの思考実験によって正当化されてきたが、近年の実験技術の進歩により、1980年代からこの関係式の普遍的正当性に疑問がもたれるようになった。

不確定性原理の解明は重力波検出や量子情報理論の基礎に関わる重要な問題と認識されていたが、そのためには測定過程を完全に一般的に解析する理論的方法の開発が必要であった。この問題は、長年の未解決問題である観測問題とも関わり、きわめて困難な問題と見なされてきたが、本研究では、1980年代から本研究代表者によって提唱され、理論展開されてきた完全正写像値測度（インストルメント）を中心概念とする完全に一般的な観測理論に基づき、Heisenberg の不確定性原理の普遍的に正しい定式化を世界で最初に発見し、厳密に証明することに成功した。ここで展開された理論的方法は、本研究代表者により長年提唱され、独自に展開されてきたものであるが、既にいくつかの教科書によって紹介されるようになった。この研究で発見された関係式は、これまで全く予想されていなかったもので、全く独自に発見された関係式である。

本研究では、更にこの新しい不確定性原理から、従来、Wigner-Araki-Yanase (WAY) の定理として知られてきた保存法則のもとでの測定の限界についての定性的関係を定量的に一般化することに成功し、それを更に発展させて、保存法則から不可避的に導かれるデコヒーレンスに起因する量子状態制御の限界を定量的に求めることに成功した。これらの成果は、新しい不確定性原理が基礎物理学にとどまらず、量子情報の研究においても明らかな先導性を有していることを示している。

2. 研究内容及び成果

Heisenberg が不確定性原理を提唱して以来、基本物理量の測定は、その精度と反比例する大きさの擾乱をその共役物理量に与えることが定説とされてきた。この考えに基づいて、1980年代初めに Braginsky や Caves らは量子非破壊測定の理論を構築して、干渉計のように自由質点をアンテナとする重力波検出装置には標準量子限界と呼ばれる不可避な感度の限界があると主張した。しかし、1983年に Yuen は収縮状態測定と呼ばれる測定方法によって重力波検出の標準量子限界が破られると主張した。これに対して Caves は、1985年に不確定性原理の下で収縮状態測定が十分な精度を持たないことを示して、収縮状態測定によっては標準量子限界が破られないと結論した。このことから、精度の高い収縮状態測定が物理的に実現可能か否

かが問題とされた。1988年に本研究代表者は、無雑音な収縮状態測定の実現可能なモデルを構成し、実際に標準量子限界が打破されることを示して、この論争を決着させた。このことにより、Heisenbergの不確定性原理の破れが間接的に示唆されたが、その破れを明示的に示す問題は残されたままであった。本研究では、平方根平均2乗誤差および平方根平均2乗擾乱の概念を一般的に定義して、無雑音収縮状態測定モデルでは、確かにHeisenbergの不確定性原理が破れていることを示してこの問題を解決した。

Heisenbergの不確定性原理の破れが明らかになったので、それでは、誤差と擾乱が普遍的に満たすべき相互関係はどのような関係式で表現されるのかという問題を研究した。本研究では、任意の測定装置によって任意の物理量Aを測定するとき、その誤差 $\epsilon(A)$ と他の物理量Bが受ける擾乱 $\eta(B)$ の間に、

普遍的な不確定性原理：

$$\epsilon(A)\eta(B) + \epsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq (1/2)|\langle[A,B]\rangle|$$

という関係が普遍的に成立することを導いた。ここに、 $\sigma(A)$ 、 $\sigma(B)$ はそれぞれ測定初期状態におけるA、Bの標準偏差であり、 $|\langle[A,B]\rangle|$ は交換子 $[A,B]=AB-BA$ の測定初期状態における期待値の絶対値である。新しい関係式と従来の関係式との大きな相違は、従来、非可換量の間では、有限精度の下で擾乱のない測定や有限の擾乱の下で完全精度の測定が不可能とされていたのに、新しい関係式はそれらが理論的に可能であることを明らかにした点である。つまり、完全精度の測定、すなわち、 $\epsilon(A)=0$ を満たす測定は、

無雑音測定の不確定性原理： $\sigma(A)\eta(B) \geq (1/2)|\langle[A,B]\rangle|$

という制約の下で可能であり、また、擾乱のない測定、すなわち、 $\eta(B)=0$ を満たす測定は、

無擾乱測定の不確定性原理： $\epsilon(A)\sigma(B) \geq (1/2)|\langle[A,B]\rangle|$

という制約の下で可能である。

一般に、測定相互作用は自然界の保存法則に従うと考えられるが、保存法則から測定精度に限界が現れることは、従来、WAY定理として定性的に知られてきた。本研究では、それを定量的に導くことに成功した。つまり、対象と測定器の間の測定相互作用が、対象の物理量 L_1 と測定器の物理量 L_2 の和を保存し、測定器のメータが物理量 L_2 と可換であれば、この測定の測定誤差は

保存則導来型測定限界：

$$\epsilon(A)^2 \geq |\langle[A,L_2]\rangle|^2 / (4\sigma(L_1)^2 + 4\sigma(L_2)^2)$$

で示される下限を持つことが、無擾乱測定の不確定性原理から導かれた。WAY定理と不確定性原理の関係を解明することは長年の未解決問題となっていた。本研究により、WAY定理は従来不確定性原理からは導かれないが、新しい普遍的な不確定性原理から容易に導かれることが示されたのは、興味深い。

量子計算における誤り耐性量子計算理論の最近の成果により、スケラブルな量子計算機が物理的に実現可能か否かという根本的な問題は、量子計算素子の実現を阻むような制御系からの不可避なデコヒーレンスの存在が、物理学の基本法則から導かれるのかどうかという問題に帰着

される。一方、合成系の保存量の存在が、その相互作用を通してエンタングルメントを形成することから、量子状態制御一般において、自然界がもつ保存法則が、制御系からの不可避なデコヒーレンスを導くと考えられる。

本研究では、保存則導来型測定限界に基づいて、量子計算素子の精度の限界を与える理論を構築した。その結果、スピンの成分で計算基底を表現するような量子計算の現行の標準モデルでは、角運動量保存法則によって引き起こされる量子計算素子実現の精度に一定の量子限界が存在することを明らかにした。すなわち、制御系がnビットの量子ビットからなる場合、制御系と量子ビットの合成系の角運動量を保存するユニタリ作用素で制御否定ゲート、あるいは、Hadamardゲートを実現する場合に、少なくとも $1/(4n^2)$ 以上の誤り確率が発生することを導いた。一方、制御系が電磁場で平均光子数 $\langle N \rangle$ のコヒーレント状態にある場合は、 $1/(16\langle N \rangle)$ の不可避な誤り確率を持つことが得られた。後者は、Jaynes-Cummingsにおいてvan Enk, Kimble, Gea-Banaclocheらによって独立に得られた電磁場の振幅揺らぎに基づく誤り確率と整合的である。

これらの成果により、従来の情報理論にはない新しい不確定性原理に基づく量子情報の一般理論を構築するための基礎を確立することができた。

3. むすび

本研究では、不確定性原理という物理学の根本原理に関する従来の定説を再検討し、これまで全く予想されていなかった量子力学全般にわたる普遍的な原理を新たに確立し、それを応用して、量子状態制御全般にわたる新しい限界を明らかにした。従来、量子暗号の分野では、安全性の根拠が不確定性原理にあることは明らかであっても、安全性を導く議論は、個別的かつ間接的方法が利用されてきた。今後、不確定性原理の新しい定式化により量子暗号の安全性を議論する一般的方法を研究する計画である（平成18年度SCOPE新規採択課題）。この研究により、新しい不確定性原理が、量子計算や量子通信の限界性能を明らかにするだけでなく、量子暗号の安全性などの分野にも広範に応用される根本原理であることを明らかにしていく計画であり、関連する量子情報技術全般における新しい知の創出が期待される。

【誌上发表リスト】

- [1] M. Ozawa, "Conservative quantum computing", Phys. Rev. Lett. Vol. 89, pp. 057902 (1-4) (2002).
- [2] M. Ozawa, "Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement", Phys. Rev. A Vol. 67, pp. 042105 (1-6) (2003).
- [3] M. Ozawa, "Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements", Ann. Phys. (N.Y.) Vol. 311, No. 2, pp. 350-416 (2004).

【報道発表リスト】

- [1] "「知」の限界を覆す者"（取材報道）、日経産業新聞、2004年1月15日
- [2] "物理学の常識に挑む数学者"（取材報道）、日経サイエンス2004年9月号、2004年9月1日