2018 年 2 月 18 日

GDP 統合に関するメモ

西郷 浩

1 目的

最小 2 乗法を援用して、需要側と供給側の系列の統合比率を求める方法を提示する。具体的には、

$$\hat{Y}_t = D_t^{\alpha}\, S_t^{1-\alpha} \qquad (t = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

または、

$$\tilde{Y}_t = \beta D_t + (1-\beta) S_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

で計算される系列が、系列 $\{Y_t\}$ になるべく近くなるように係数 α または β を選ぶ。ただし、Y_t は t 時点での確報の値、D_t と S_t はそれに対応する需要側と供給側の値を示す。

2 乖離の定義

式 (1) に基づく $\{Y_t\}$ と $\{\hat{Y}_t\}$ との乖離を以下のように定義する。式 (1) は以下のように書き換えられる。

$$\log \hat{Y}_t = \alpha \log D_t + (1-\alpha) \log S_t$$

（相対的な）水準の乖離と変化率の乖離の間の重みをあらわす係数 λ（ただし、$0 \le \lambda \le 1$）を所与として、$\{\hat{Y}_t\}$ と $\{Y_t\}$ との乖離を以下のとおり定める。

$$d(Y, \hat{Y}) = \lambda \sum_{t=1}^{n} (\log Y_t - \log \hat{Y}_t)^2 + (1-\lambda) \sum_{t=2}^{n} (\Delta \log Y_t - \Delta \log \hat{Y}_t)^2. \tag{3}$$

式 (3) の右辺第 1 項は近似的に相対的な乖離 $(Y_t - \hat{Y}_t)/\hat{Y}_t$ の平方和に等しく、第 2 項は近似的に Y_t の変化率 $\dot{Y}_t = \Delta Y_t / Y_{t-1}$ と $\hat{Y}_t$ の変化率 $\dot{\hat{Y}}_t = \Delta \hat{Y}_t / \hat{Y}_{t-1}$ の差の平方和に等しい。係数 λ の大きさによって、どちらがどの程度重視されるかが決まる。

式 (2) に基づく $\{Y_t\}$ と $\{\tilde{Y}_t\}$ との乖離も同様に以下のように定義する。

$$d(Y, \tilde{Y}) = \lambda \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \tilde{Y}_t)^2 + (1-\lambda) \sum_{t=2}^{n} (\dot{Y}_t - \dot{\tilde{Y}}_t)^2 \tag{4}$$

式 (4) の右辺第 1 項は（絶対的な）Y_t と $\tilde{Y}_t$ との乖離の平方和である。したがって、$\{Y_t\}$ の測定単位の変化によって値が変化する。このことを考慮して、係数 λ の値を選ぶ必要がある。

3 係数の求め方

所与の λ について式 (3) を最小にする係数 $\hat{\alpha}_\lambda$ は以下のように求められる。

$$\hat{\alpha}_\lambda = \frac{\lambda c_1 \hat{\alpha}_1 + (1-\lambda) c_0 \hat{\alpha}_0}{\lambda c_1 + (1-\lambda) c_0} \tag{5}$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^{n}(\log D_t - \log S_t)(\log Y_t - \log S_t)}{\sum_{t=1}^{n}(\log D_t - \log S_t)^2},\\
\hat{\alpha}_0 &= \frac{\sum_{t=2}^{n}(\Delta\log D_t - \Delta\log S_t)(\Delta\log Y_t - \Delta\log S_t)}{\sum_{t=2}^{n}(\Delta\log D_t - \Delta\log S_t)^2},\\
c_1 &= \sum_{t=1}^{n}(\log D_t - \log S_t)^2,\\
c_0 &= \sum_{t=2}^{n}(\Delta\log D_t - \Delta\log S_t)^2.
\end{aligned}
$$

たとえば、$\lambda = c_1^{-1}/(c_1^{-1} + c_0^{-1})$ とすると、$\hat{\alpha}_\lambda = (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_0)/2$ となる。逆に言えば、α_λ を $\hat{\alpha}_1$ と $\hat{\alpha}_0$ の算術平均で求めた場合、相対的な乖離にかかる重みを $\lambda = c_1^{-1}/(c_1^{-1} + c_0^{-1})$ で選んだことになる。

所与の λ について式 (4) を最小にする係数 $\tilde{\beta}_\lambda$ は以下の反復式で求められる。反復式が必要な理由は、$\tilde{Y}_t$ が式 (4) の分母にも現れるためである。

1. $\tilde{\beta}_\lambda$ の初期値を定める。これを $\tilde{\beta}_\lambda^{(0)}$ と記す。$\varepsilon > 0$ を定める。$k = 1$ とする。
2. $\tilde{\beta}_\lambda^{(k-1)}$ を所与として、第 k 回目の反復において、$\tilde{\beta}_\lambda^{(k)}$ を以下のように求める。

$$
\tilde{\beta}_\lambda^{(k)} = \frac{\lambda\sum_{t=1}^{n}(D_t - S_t)(Y_t - S_t) + (1-\lambda)\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{\Delta D_t - \Delta S_t}{\tilde{Y}_{t-1}^{(k-1)}}\right)\left(\frac{\Delta Y_t}{Y_{t-1}} - \frac{\Delta S_t}{\tilde{Y}_{t-1}^{(k-1)}}\right)}{\lambda\sum_{t=1}^{n}(D_t - S_t)^2 + (1-\lambda)\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{\Delta D_t - \Delta S_t}{\tilde{Y}_{t-1}^{(k-1)}}\right)^2}
$$

   ただし、$\tilde{Y}_{t-1}^{(k-1)} = \tilde{\beta}_\lambda^{(k-1)} D_t + (1 - \tilde{\beta}_\lambda^{(k-1)}) S_t$ である。

3. もし、$|\tilde{\beta}_\lambda^{(k)} - \tilde{\beta}_\lambda^{(k-1)}| > \varepsilon$ であれば、k を 1 つ増加させて、ステップ 2 に戻る。そうでなければ、$\tilde{\beta}_\lambda = \tilde{\beta}_\lambda^{(k)}$ として計算を終える。

収束の条件は未確認である。しかし、提供されたデータで試算した結果は常に収束した。

4 試算

試算の結果、式 (4) の係数 λ の値を、式 (3) の係数 λ の値に対応するように選べば、$\tilde{\beta}_\lambda$ と $\{\tilde{Y}_t\}$ は、$\hat{\alpha}_\lambda$ と $\{\hat{Y}_t\}$ とほとんど変わらなかった。以下では、$\hat{\alpha}_\lambda$ と $\{\hat{Y}_t\}$ に関する結果について報告する。

4.1 消費系列

図 1 には対数変換した消費の系列と、その階差（変化率）を示す。需要の値と供給の値とで大小関係が入れ替わることがある。また、確報の値が両者に間に位置しない場合もある。$0 \leq \alpha \leq 1$ という想定は、確報の値が需要側の値と供給側の値との間にあることを想定している。もし、その想定から乖離する傾向が続く場合は、需要系列と供給系列の推計方法にまで立ち返って慎重に精査するのがよい。

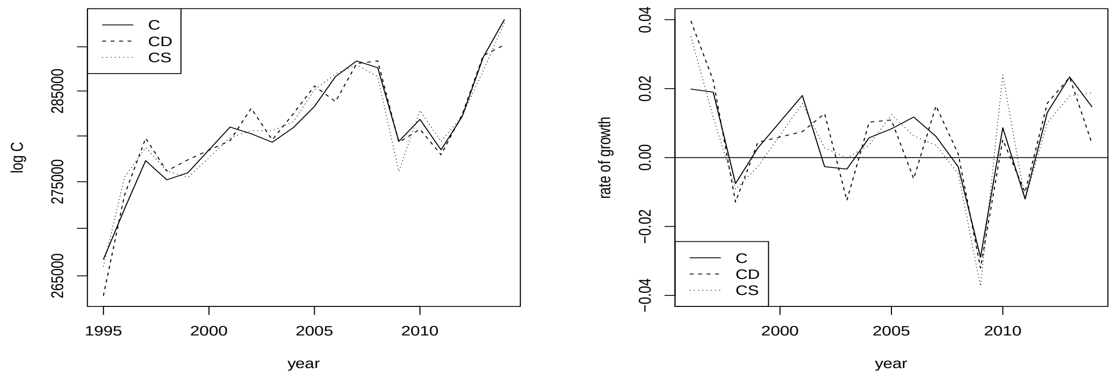

図 1: 対数変換した消費の系列（左）とその階差（右）

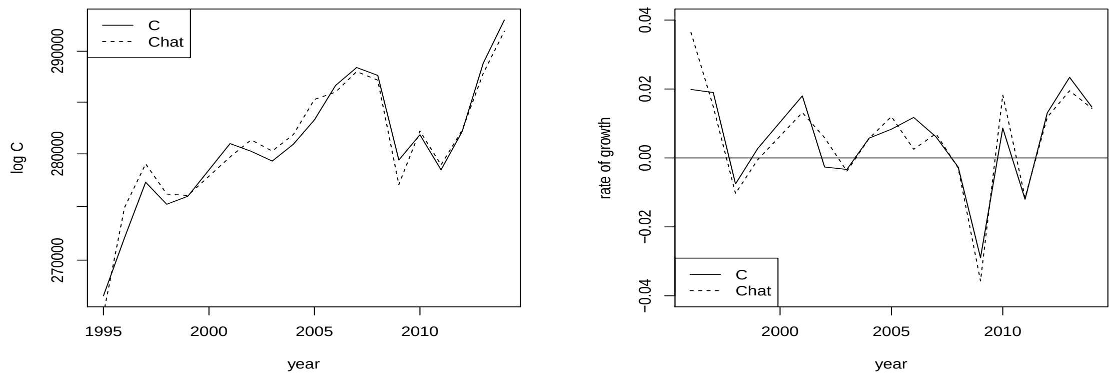

図 2: 対数変換した消費の実系列と推計系列（左）とそれらの階差（右）

$\lambda = 1$ と $\lambda = 0$ に対応する $\hat{\alpha}_\lambda$ の値は、それぞれ、以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}_1 &= 0.3216 \\
\hat{\alpha}_0 &= 0.2857
\end{aligned}
$$

$c_1 = 4.90 \times 10^{-5},\ c_0 = 7.68 \times 10^{-6}$ であるから、$\lambda = c_1^{-1}/(c_1^{-1} + c_0^{-1}) = 0.135$ とすれば、$\hat{\alpha}_{0.135} = 0.304$ となる。この統合比率を使って得られる $\{\hat{C}_t\}$ を $\{C_t\}$ と比べると、図 2 のようになる。

4.2 投資系列

図 3 には対数変換した投資の系列と、その階差（変化率）を示す。投資の系列についても、消費の系列と類似の注意が必要である。また、消費の系列よりもいっそう変化が激しい。

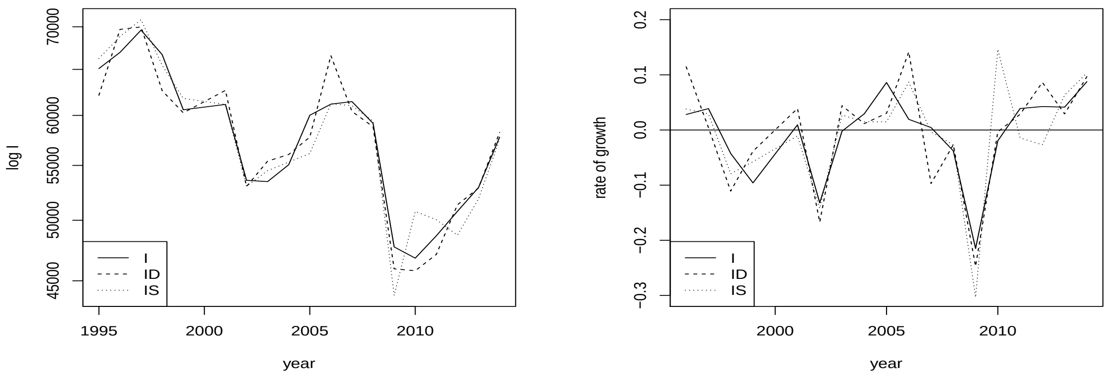

図 3: 対数変換した投資の系列（左）とその階差（右）

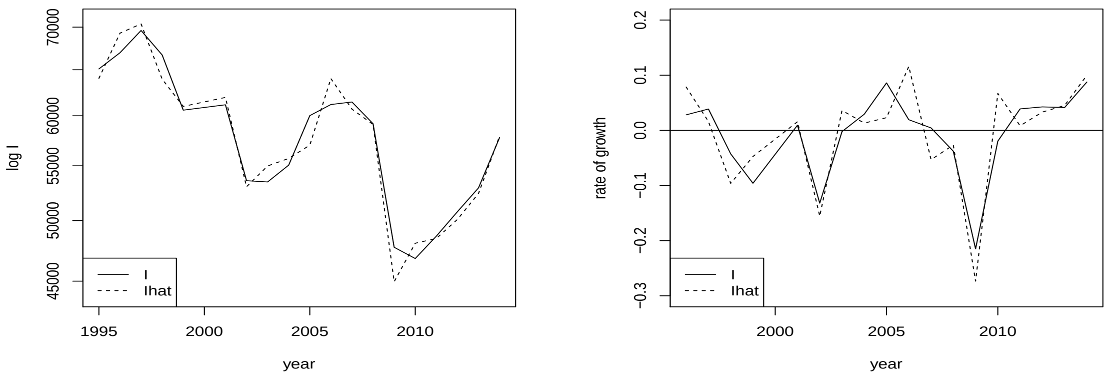

図 4: 対数変換した投資の実系列と推計系列（左）とそれらの階差（右）

$\lambda = 1$ と $\lambda = 0$ に対応する $\hat{\alpha}_\lambda$ の値は、それぞれ、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= 0.5233 \\ \hat{\alpha}_0 &= 0.5374 \end{aligned}$$

$c_1 = 4.16 \times 10^{-4}$, $c_0 = 5.83 \times 10^{-3}$ であるから、$\lambda = c_1^{-1}/(c_1^{-1} + c_0^{-1}) = 0.933$ とすれば、$\hat{\alpha}_{0.933} = 0.530$ となる。この統合比率を使って得られる $\{\hat{I}_t\}$ を $\{I_t\}$ と比べると、図 4 のようになる。

5　まとめ

このメモでは、統合比率の合計が 1 になるという前提のもとで、（相対的な）水準と変化率の両方を勘案した統合比率の計算方法を提示した。

試算の結果、λ の値によらず、統合比率 $\hat{\alpha}_\lambda$ の計算結果は、0 と 1 の間の数値となった。最小 2 乗法では $0 \leq \hat{\alpha}_\lambda \leq 1$ という制約は課していないけれども、$\{Y_t\}$ と $\{D_t\}$, $\{S_t\}$ が大きく乖離していない限り、この制約は結果的に満たされるようである。

いずれにせよ、λ の値の決め方や $\hat{\alpha}_\lambda$ のの計算方法よりも、$\{D_t\}$ や $\{S_t\}$ の選択方法の方が結果に及ぼす影響がはるかに大きい。したがって、$\{Y_t\}$ と安定的な関係を持つ $\{D_t\}$ と $\{S_t\}$（理想的には、前者がいつも後者 2 つの間に入る）を発見することに注力する方が生産的である。