

— 第2回 振動の基礎：振動の発生と伝搬 —

独立行政法人 産業技術総合研究所 国 松 直

1 はじめに

今回は、振動の本質、すなわち振動の基本的な性質に主眼を置き、振動が発生して周囲へ伝搬していく過程で起こる様々な物理現象や、振動を物理量として表示する際の約束事などについて解説します。

振動という言葉の定義は、Wikipedia(<http://ja.wikipedia.org/wiki/振動>)では、「振動（しんどう、英語：vibration）とは、状態が一意に定まらず揺れ動く事象をいう。」と記載されています。また、「JIS B 0153 ”機械振動・衝撃用語”」では、「ある座標系に関する量の大きさが、その平均値又は基準値よりも大きい状態と小さい状態とを交互に繰り返す変化。通常時間に対する変化である」とあります。

一方、類似の言葉の波動は、Wikipedia (<http://ja.wikipedia.org/wiki/波動>) では、「波動（はどう、英語：wave）とは、単に波とも呼ばれ、（海や湖などの）波のような動き全般のことであり、物理学においては波動と言うと、何らかの物理量の周期的変化が空間方向に伝播する現象を指している。」と記載されています。2次元座標では、ある瞬間の媒体の静止位置からの振動量（縦軸）に対して、振動の場合、横軸は時間、波動の場合、横軸は距離で表されます。

振動・波動現象は力学、電気回路、音・光・電波の性質など、私たちの身のまわりの身近な問題として関連しています。音も空気の振動です。

2 振動の発生と物理的表示

(1) 振動現象

単純な例として、ばねに吊したおもりの上下振動のように、物体に働いている力が力の方向を繰り返し変えるとき振動が起こります。逆に言えばそのような力が働いていないときには振動は起こりません。この場合、ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーがその形態を互いに継続して変換し合っています。

一般に、物体(媒質)に力が作用すると、元に戻ろうとする力が働くことにより、振動が生じます。地盤を加振する力には、大きく分けて建設作業、平面道路交通などの場合のように直接地盤を加振するものと、工場機械、鉄道交通、さらには高架道路交通のように何らかの構造体を介して地盤を加振するものに分けられます。

(2) 振動の振動数、振幅、周期、波長

ばねに吊したおもりの上下振動を観察すれば、一定の間隔で繰り返していることが分かります。

初期の静止状態からの位置（距離）を変位と呼び、変位 y が時間 t の関数として次式で表される振動は、正弦波と総称されます。

$$y = A \cos(\omega t + \phi) \quad A, \omega, \phi : \text{定数}$$

または、

$$y = A \sin(\omega t + \phi) \quad A, \omega, \phi : \text{定数}$$

ここに、 y は時間 t とともに変化する量、 A は振幅、 ω は角振動数(円振動数)、 ϕ は初期位相角 ($t=0$ における y の値)、 $(\omega t + \phi)$ は位相と呼ばれます。

これを図示すれば、図 2-1 のようになります。この図は、ばねに吊したおもりを静止状態（おもりの重さ分だけばねが伸びた状態）から $y = -A$ だけ引いて手を離したときを $t=0$ として、描いたものです。手を離すと、おもりはばねの力によって上昇し、最上点 $y=A$ に達し、その後下降に転じて再び最下点に戻るといふ運動の繰り返し、正弦振動を行います。これは正弦関数で表されることから、1周期 (T) は 2π (rad(ラジアン)、 $2\pi=360^\circ$) であり、 $\omega T = 2\pi$ という関係が成立します。周期の単位を秒 (s) とすれば、振動数 (f) は 1 秒間の振動の繰り返し回数であることから、 $f=1/T$ であるので、上記の関係を変形すれば、 $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ となります。これは時間 2π の間に運動が繰り返される回数を示します。

正弦振動が媒質中を伝搬する波動の場合には、図 2-1 の横軸が距離で表されます。この場合は、周期 (T) の代わりに距離 (x) に対して、波長 (λ (m)) ごとに同じ状態が繰り返されることとなります。

(3) 変位、速度、加速度

図 2-1 は、おもりの静止位置からの変位を表した図ですが、単純に速度は変位の時間的変化です。数学的には速度は変位の時間 t による1階微分として求められます。同様に、加速度は速度の時間 t による1階微分または、変位の時間 t による2階微分として求められます。逆に言えば、速度は加速度の1階積分、変位は速度の1階積分、加速度の2階積分で求められます。

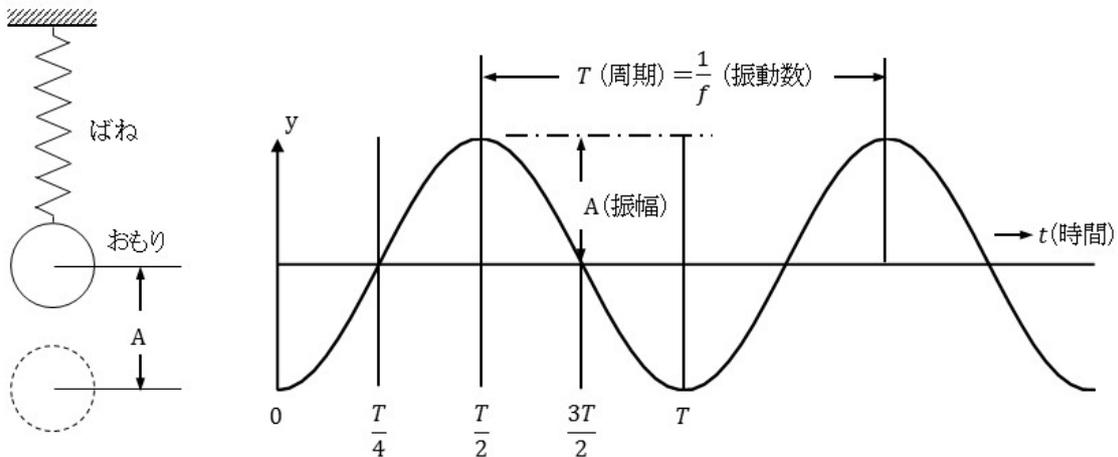


図 2-1 正弦振動の時間変化（変位）。

振動の変位を、

$$y = A \sin(\omega t)$$

で表せば、速度は、

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega A \cos(\omega t) = v_0 \cos(\omega t)$$

加速度は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \omega v_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= a_0 \sin(\omega t + \pi) \end{aligned}$$

で表されます。

ここに、

$$\omega^2 A = \omega v_0 = a_0, \quad A = v_0 / \omega = a_0 / \omega^2$$

これらの関係から、速度は変位と位相が $\pi/2$ 、加速度は速度と位相が $\pi/2$ 異なること、また加速度は変位と π (逆位相)だけ異なることが分かります。正弦振動の場合には、変位、速度、加速度のいずれかの振幅と振動数が分かれば、相互に変換することができます。言い換えれば、正弦振動でない振動については、変位、速度、加速度の間に簡単な関係は成立しないので、1つの量から他の量への変換は微分または積分によるしかありません。

(4) 一般的な振動

以上、正弦振動を例に説明をしてきましたが、現実には、無限に振動する現象は存在せず、振動する物体に運動を妨げようとする抵抗力が働きます。例えば図 2-1 では、空気の抵抗やばねなどの弾性体の内部に作用する固体の内部摩擦などがあります。そのため、振動の振幅は徐々に小さく、減衰していきます。このような振動を減衰振動(減衰自由振動)、図 2-1 のような減衰のない振動を、単振動(無減衰自由振動)と呼びます。一方、鍛造機のように周期的な力が加わる場合は、外力の作用の仕方などにより、振動のようすが異なります。このような振動は、強制振動(無減衰強制振動、減衰強制振動)と呼ばれます。

通常身近な振動現象の時間変化(時刻歴波形)は正弦波形ではなく、不規則なランダム波形であり、数学的に正弦波形の重ね合わせで表すことができます。後で、周波数分析として説明します。

ランダム波形の大きさを表す量として、図 1 のように横軸を時間軸とした場合、以下が挙げられます。

- ・ピーク値：振幅がゼロの軸を横切りながら上下を繰り返すとき、その1波の中で一番大きな振幅を、正のピーク値、負のピーク値といいます。また、正のピーク値から負のピーク値、または負のピーク値から正のピーク値までの値を、「Peak to Peak, (p-p),

(pp)」といいます。

- ・最大値：ランダム波形では、振幅は時間とともに変化し、ある瞬間の値を「瞬時値」といい、その瞬時値が対象時間内において一番大きい値を正の最大値、負の最大値といいます。したがって、符号を考慮せず絶対値としていけば、ピーク値の中で最も大きな振幅が最大値になります。正弦波形では、ピーク値と最大値は同じになります。ランダム波形の場合、最大値は、波形が時間とともに変化しますので、対象とする時間区間の中で変化します。
- ・実効値 (root mean square, rms, RMS)：瞬時値の2乗したものを時間平均し、その平方根で表される値です。式で表現すれば以下のようになります。

$$A_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a(t)^2 dt}$$

ここに、 $a(t)$ は振幅時刻歴関数または時間 t での瞬時値、 T は対象とする時間区間(sec)です。この式は、対象時間区間において、大きさの変化する振幅量をこれと等しいエネルギーをもつ一定の大きさの振幅量で表した量を意味しています。正弦振動では、実効値は最大値の $1/\sqrt{2}$ (約 0.71)倍となります。

(5) 振動のデシベル表示

音の測定では、空気中の音圧が測定されますが、振動の場合、音と異なり変位、速度、加速度の物理量があり、何を測定するかは目的により異なります。また、音と大きく異なる点ですが、振動には方向と大きさがあります。そのため、振動の測定では方向を特定しておく必要があり、その方向は通常水平面上での測定を原則として、直交座標をもとに上下方向、水平面上の直交2方向の3方向になります。

公害振動の場合は、決めごととして、加速度を使用します。加速度の時間変化に対して人がどのように感じるのかという心理的反応が問題になります。このような心理量は物理量の対数に比例することが知られています(ウェーバー・フェヒナー(Weber-Fechner)の法則)。そのため、公害振動では、振動加速度の大きさではなく、ある基準値に対する振動加速度実効値の比(相対値)としてデシベル表示(単位：dB)された値が一般的に用いられています。式で表示すれば、以下のようになります。

$$L_{Va} = 20 \log(a/a_0) \quad (\text{dB})$$

ここに、基準値 a_0 は、振動規制法では、 $10^{-5}m/s^2$ を用います。この値を振動加速度レベルと呼びます。デシベルは「二つのパワーの比の常用対数の10倍」で定義されるので、エネルギー比(a^2/a_0^2)の対数($\log(a^2/a_0^2)$)の10倍($10 \log(a^2/a_0^2) = 20 \log(a/a_0)$)として上式が誘導されます。ここで、振動加速度実効値が重力加速度($9.8m/s^2$)に等しいときには、振動加速度レベルは約120dBと計算されます。

デシベルは数値の単純な加減算ができないなど馴染みにくいところがあり、70dBの振動源が2台あるとき、その振動加速度レベルは70dB+70dB=140dBではありません。定義に戻って、同一振動源の数が n 台になった場合、レベルの増加量は、 $10 \log(n)$ となります。表2-1は n に対するレベルの増加量の一例です。

レベルが 70dB の同一振動源が 2 台 ($n = 2$) ある場合、レベルの増加は 3dB であるので、レベルは 73dB になります。同様に、5 台ある場合には、77dB になります。

表 2-1 n に対するレベルの増加量

n	2	3	5	10	100
増加量 (dB)	3	5	7	10	20

(6) 振動レベル

人の振動に対する受感反応を振動に関係する物理量である加速度、速度、変位と関連づけるために、古くから正弦振動を用いて、振動数と振動の振幅に関する被験者試験が実施され、その結果を踏まえて、周波数毎に同一加速度に暴露された被験者が、その大きさを相対的にどの程度の大きさに感じるのかという感度特性（音に対する等ラウドネス曲線に相当）が決められています。その感度特性の逆特性で補正（周波数補正）した特性で加速度を補正すれば、人の振動感覚を表すことができることとなります。JIS C 1510：振動レベル計では、基準レスポンスとして、次表が示されています。

表 2-2 振動感覚補正值

周波数 (Hz)	1	2	4	6.3	8	16	31.5	63	80
補正值 (鉛直)	-6	-3	0	0	0.9	-6	-12	-18	-20
補正值 (水平)	3	2	-3	-7	-9	-15	-21	-27	-29

この表では、補正值を離散的な周波数（具体的には、1/3 オクターブバンド中心周波数）で示しています。この補正值の逆特性がおおよそ人の感覚特性に相当します。このことから、人の振動感覚について次のようなことが分かります[1]。

- 1) 鉛直振動と水平振動では感じ方に差がある。
- 2) 鉛直振動では 4～8Hz の周波数範囲の振動が最も感じやすい。
- 3) 水平振動では、1～2Hz の周波数範囲の振動が最も感じやすい。
- 4) 約 3Hz 以下の周波数では水平振動の方が感じやすく、それより高い周波数では鉛直振動の方がよく感じる。

3 波動と伝搬

波動または波（以下、波と呼ぶ）は、空間のある場所に生じた物理状態の振動的変化が次々に相隣る部分に影響を与えて他の場所に移動し伝わっていく現象といえます[2]。

公害振動の場合には、機械の運転や自動車走行、くい打ち機械の稼働などにより、地盤に力が作用して、変形が生じ、その変形が波動として拡がることとなります。波を伝えるものを媒質といいます。公害振動では、媒質として地盤を伝わることとなります。

弦や棒の波の伝搬は 1 次元の波動方程式で表されますが、地盤を伝わる波は 3 次元での現象となります。無限大の媒質を考える場合は、無限弾性体、3 次元でも地盤のように地

盤の上が空気層のような場合には、半無限弾性体という言い方をします。地盤も固体材料として弾性体(変形しても元に戻る性質(弾性)を有する物質)です。地盤中を伝わる波には、いくつか性質の異なる波の種類があります。

無限弾性体内：

実体波	縦波(疎密波, 1次波, P波, 圧縮波, 非回転波, 体積変化の波)
	横波(ねじり波, 2次波, S波, せん断波, 等体積波, 変形の波)

- ・縦波：媒質の変位の方向が波の伝わる方向と一致するもの。体積変化に対する抵抗が縦波の原因。
- ・横波：媒質の変位の方向が波の伝わる方向と互いに垂直なもの。変形に対する抵抗が横波の原因。詳しくは、伝搬方向の鉛直面内で振動する SV 波と水平面内で振動する SH 波が存在。

半無限弾性体内：

表面波	レイリー (Rayleigh) 波(R波)
	ラブ (Love) 波

- ・レイリー波：半無限の境界付近に限って運動する波。深さとともに急激に減少。
- ・ラブ波：媒質が層状構造であるとき、多数の反射波から合成される波。水平面で偏向したせん断波から構成。「水平面で偏向したせん断波が表層面に現れ、多重反射によって伝播する波」[3]。

これらの波の伝搬する速度(伝搬速度)が分かれば、ある点で発生した波が、他の任意点に達するまでの時間が予想されます。すでに、地震波でご存知のように、半無限弾性体の場合には、伝搬速度は、縦波>横波>レイリー波(横波速度より 0.9~0.95 倍とわずかに遅い)、という順番です。また、その波の進み方のイメージとしては、文献[4]にイメージ図が示されています。

図 2-2 は、等方均質半無限弾性体上の円形フーチング基礎(上下動加振)から発生する波の地中変位分布を示した図です。この図から実体波(縦波・横波)は振源(基礎部分)から球面状に、レイリー波は円筒状に広がっていくことが分かります。この幾何学的な伝搬により、各波の単位面積を通過する振動エネルギーは振動源からの距離とともに減少していき、このエネルギー密度の減少、すなわち変位振幅の減少は幾何減衰と呼ばれています。

図にも描かれているように、実体波の振幅は $1/r$ (r は入力源からの距離)に比例して(ただし、半無限弾性体の表面付近では、 $1/r^2$ に比例して)減衰していきます。レイリー波の振幅は $1/\sqrt{r}$ に比例して減少していきます。

図中のせん断窓は、横波において大きい振幅が起こる範囲を表します。

また、これら3種類の波のエネルギーの割合は、レイリー波が 67%、横波が 26%、縦波が 7%と計算され、フーチング基礎から発生する波のエネルギーの 2/3 はレイリー波によって伝搬されます。さらに、レイリー波は実体波に比べて距離による減衰が小さいことが分かります。以上のことを勘案すれば、地表面上あるいはそれに近い所にある基礎の振動問題に対しては、レイリー波が最も重要であるということがいえます。

媒質中(地盤など)を伝搬する波でも固体の内部摩擦など、常にエネルギーを逸散させ

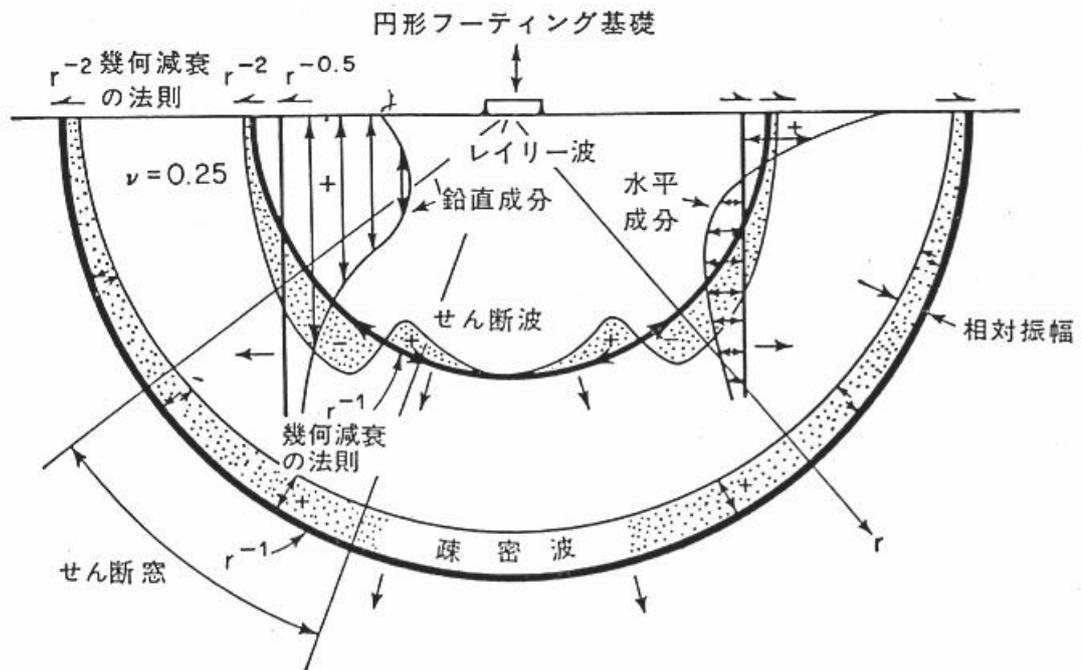


図 2-2 等方均質半無限弾性体上の円形フーチング基礎から発生する波動の変位分布[5].

るような作用、すなわち波動に伴う力学的エネルギーを熱に変えて消失させるような作用が現象の中に含まれ、波はしだいに減衰していきます。このような減衰を幾何減衰に対して内部減衰と呼びます。

4 地盤振動の伝搬特性

地盤は媒質材料としては弾性体ですが、等方均質的な材料ではなく、このような材料内を伝搬する波は複雑な挙動を示します。しかし、一般には地盤を大きく沖積層や洪積層というような地層の分類、砂質土や粘性土といった土質分類などで区分して考えることが行われています。これらの区分はボーリング調査や物理探査手法をもとに行われ、3次元的に複雑な構造として地盤構造は表されます。地盤の波動伝搬の場合、区分された各層の縦波速度、横波速度などが重要なパラメータとして、影響します。これらのパラメータを実地盤の特性を忠実に再現するように求めることはいくら費用をかけてもできません。そのため、地盤振動について数値解析的に現象を把握する場合や予測する場合でも、地盤の数値解析モデルとして、簡略化が行われます。例えば、3次元構造のある断面を切り出して2次元構造として解析するとか、不規則な層構造の境界を水平すなわち成層構造と仮定することなどが行われています。もちろん、結果に差は生じますが、だいたいの傾向を知るためには、簡便で有効な方法として用いられています。

(1) 距離減衰の経験式

先にも説明したように、振動源から伝わる地盤振動は、振動エネルギーが無限の領域へ

広がっていくことによる幾何減衰（地下逸散減衰）と土粒子の摩擦等による内部減衰により距離とともに減衰していきます。

いま、内部減衰のない一様地盤（半無限弾性体）の表面を鉛直方向に正弦波加振したとき、地表面振動の距離減衰は図2-3に示すようになります[6]。計算条件は図中に記されているように、地盤の横波速度は200m/s、加振力は9.8kNで、振動数は20Hzの結果です（P：加振力、f：加振振動数、Vs：横波の伝搬速度）。同図において、実線は厳密に求めた加速度レベルであり、内部減衰のない一様地盤（半無限弾性体）でも鉛直成分、水平成分ともに単調な減衰を示さないことが分かります。しかし、距離減衰の状況は点線で示したレイリー波の減衰でほぼ表せるとみることもできます。同図のレイリー波の減衰は幾何減衰のみであるので、距離の平方根に反比例して減衰し、 -3 dB/倍距離 の減衰（図中の点線）で表すことができます。

現場実務では、加振源からの距離xに対する振動レベルの減衰に、減衰係数 α の内部減衰を表す指数項 $\exp(-\alpha x)$ を付加した経験式が用いられており、ボルニッツ（Bornitz）式と呼ばれています。実測された距離に対する振動レベルの値を用いて、幾何減衰項と内部減衰項の係数を回帰し、予測に使用することが行われています。

(2) 伝搬経路

以下では、地盤中を伝搬する波が伝搬経路において影響を受ける主な要因をいくつか示します。

a) 地質

図 2-4 は軟弱粘土地盤と砂礫地盤で試験車を用いた振動測定結果[7]で、軟弱粘土地盤の距離減衰の方が小さいことが分かります。原因として、砂より粘土の減衰定数が小さい、砂礫地盤の方が軟弱粘土地盤より卓越振動数が高いことなどが指摘されています

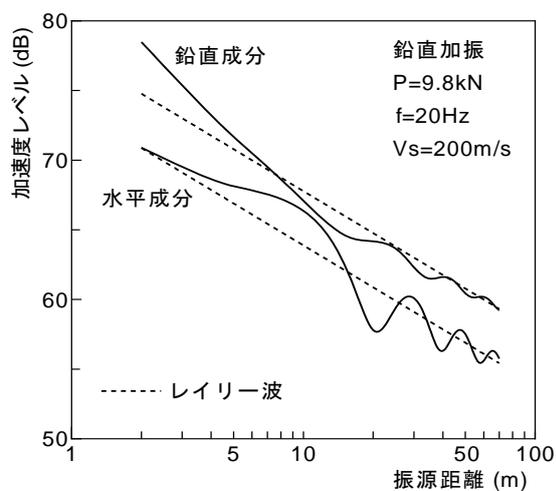


図 2-3 表面波の距離減衰.

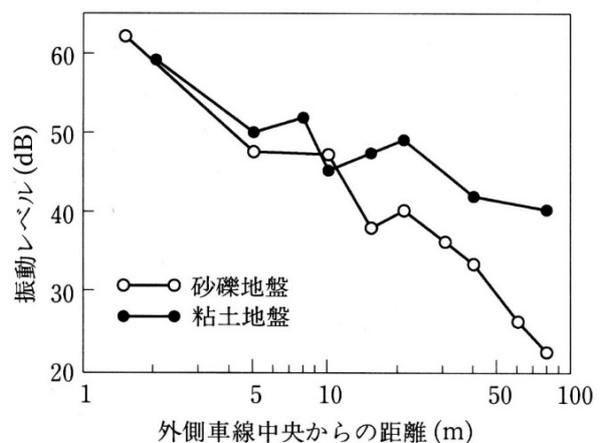


図 2-4 地質条件と距離減衰.

b) 地層

図2-5は、3種類の地盤における道路交通振動の周波数特性を比較したものです[8]。地盤の横波速度 (V_s) を地盤の固さとみなすことができるので、同図から判断して地表近くの横波速度が小さく（軟弱に）なれば、低い振動数成分が卓越していることがわかります。これより、地層構成(地盤構造)は地盤振動の振動数に大きく関わりを持つことが理解できます。

図2-6は地層構成が地盤振動の距離減衰に及ぼす影響を数値シミュレーションにより調べた結果です[9]。計算条件は図中に示してあるとおりです。また、砂質土には粘土よりも大きな内部減衰が設定されています。この図から、Case 1とCase 3の差は小さく、Case 2の振動が大きくなっていることから、表層の固さが

地表面の振動に大きく影響することがわかります。なお、距離減衰曲線に波打ち現象が見られますが、成層地盤のため複数のモードの表面波が重なり合っているものと考えられます。

c) 地形

崖のような地形では、波動の反射と回折が生じ、崖近傍では地盤振動が増幅する可能性があると言われていています。図2-7は、段違いの地形が地盤振動の距離減衰に及ぼす影響を知るために、2次元波動場の数値シミュレーションにより、段違いの無い場合（半無限地盤）と比較した結果です。図より、加振振動数が高くなるとともに、段違いの影響範囲が小さくなる傾向が見られます。これは、振動数が高くなれば表面波の波長が短くなり、

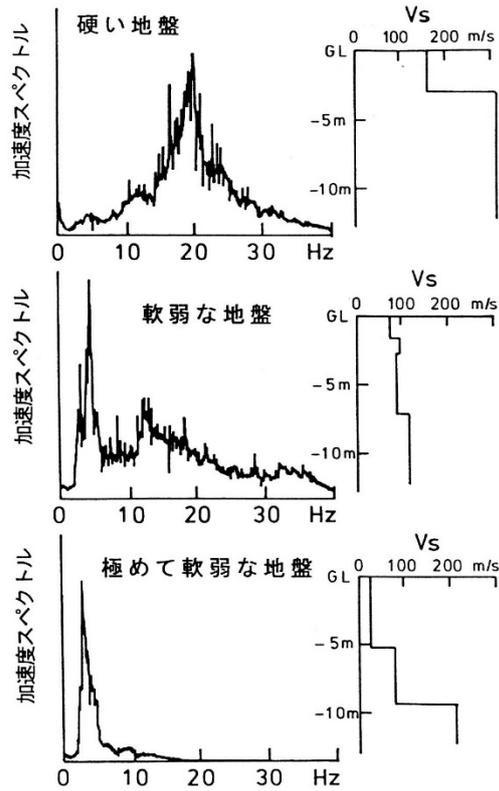


図 2-5 地層条件と地盤振動の周波数特性.

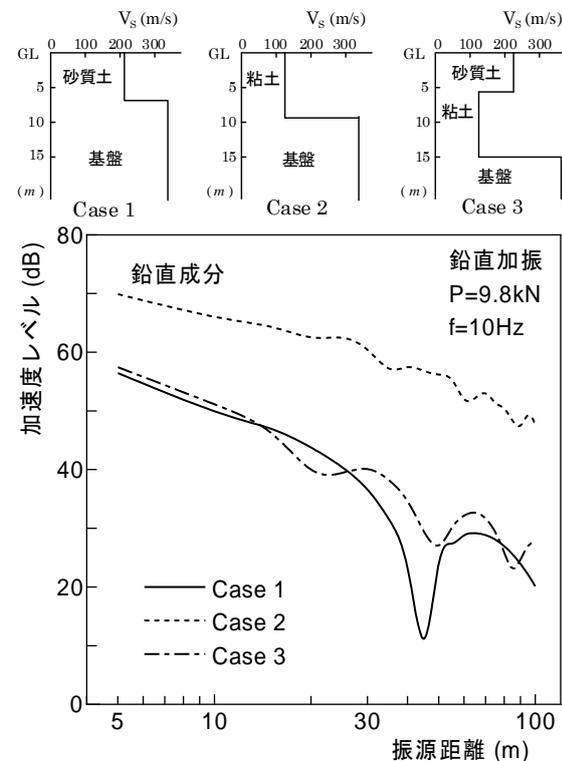


図 2-6 距離減衰に及ぼす地層の影響 (数値シミュレーション).

半無限弾性地盤の表面のように斜面に沿って、右方の無限領域へ伝搬して行くものと考えられます。

掘割道路構造も段違いの地形に近いものと考えられますが、掘割は構造体としての取扱いが入ってくるので、現象はより複雑になります。

d) 障害物

① 建物

地盤振動の測点が鉄筋コンクリート造等の規模の大きな建物の近くにある場合、地盤振動は建物の影響を受ける可能性があります。図 2-8 は、10 階建ての RC 建物の横に、建物からの離隔距離が 2m と 10m の位置に測線を設けたとき、鉛直加速度の距離減衰が建物からどのような影響を受けるか調べたものです[10]。図は、1/3 オクターブバンドレベルについて、道路端の加速度レベル (VAL) に対する相対加速度レベル

で表してあります。

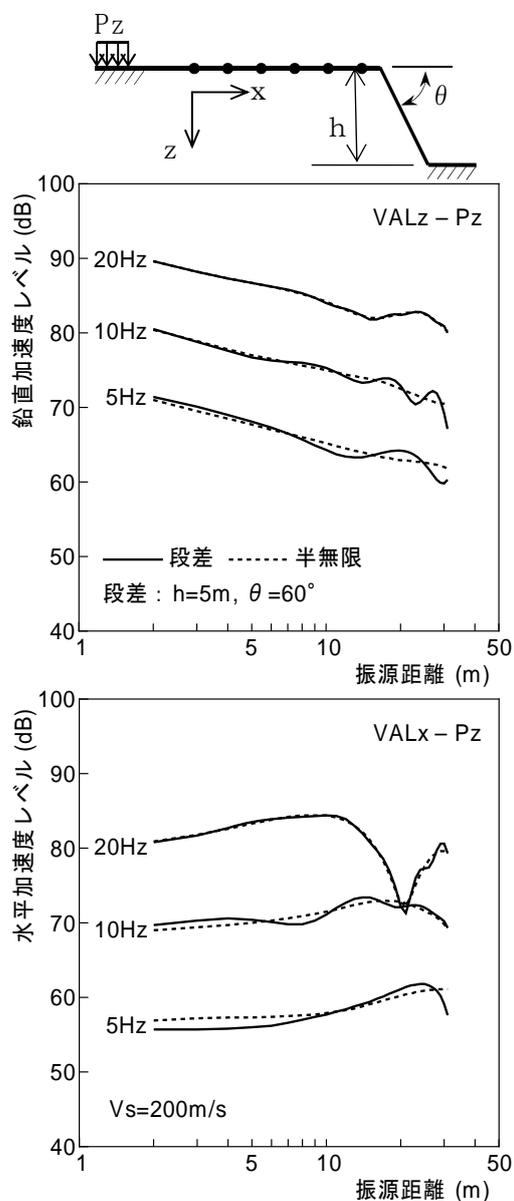


図 2-7 段違い地形近傍での距離減衰特性 (数値シミュレーション)。

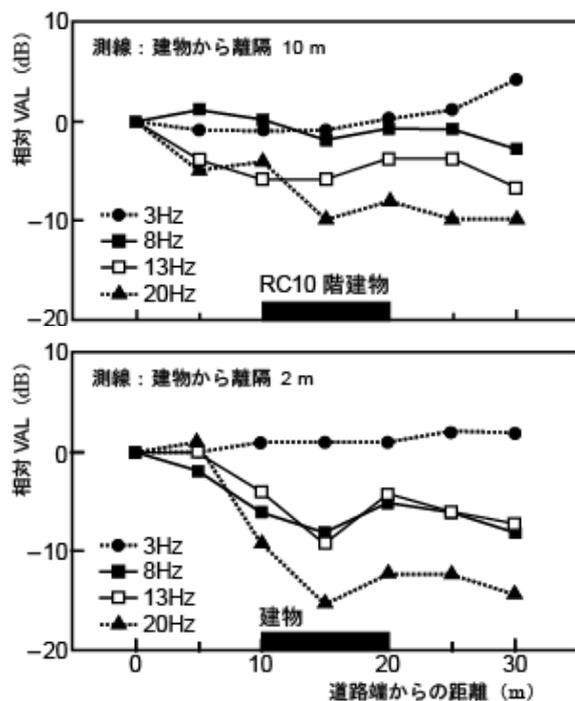
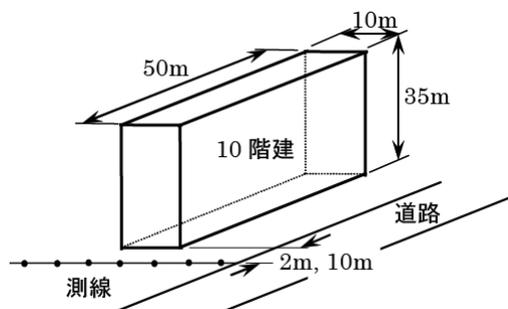


図 2-8 10 階建の建物横に設けた測線における距離減衰特性。

3Hz 成分は暗振動レベルであるため、8Hz 以上の成分の距離減衰特性に注目すれば、建物からの離隔距離が 2m の測線の距離減衰は、建物位置で 10m 測線の距離減衰より影響を受けていることが分かります。これは、建物底面のサイズによって入射波動の自由な運動が拘束されること（入力損失効果）と、建物と地盤の動的相互作用によって生じる現象であると考えられます。

地盤中を伝搬する波は、以上に示した要因以外、例えば、埋設管や暗渠の存在、地下水の水位の変化などでも影響を受け複雑な結果になるので、注意深い考察が必要になります。

【参考文献】

- [1] 公害防止の技術と法規編集委員会編：新・公害防止の技術と法規 2013〔騒音・振動編〕、p.189、(2013).
- [2] 有山正孝：振動・波動、裳華房、p.157、(1974).
- [3] F.E.リチャード jr 他（岩崎敏男他訳）：土と基礎の振動、鹿島出版会、p.105、(1986).
- [4] 後藤剛史、濱本卓司：わかりやすい環境振動の知識、鹿島出版会、p.82、(2013).
- [5] F.E.リチャード jr 他（岩崎敏男他訳）：土と基礎の振動、鹿島出版会、p.95、(1986).
- [6] 日本騒音制御工学会編：騒音制御工学ハンドブック、基礎編、技報堂出版、p.327、(2001).
- [7] 日本騒音制御工学会編：騒音制御工学ハンドブック、基礎編、技報堂出版、p.104、(2001).
- [8] 松岡達郎：地盤の特性と道路交通振動について、騒音制御、Vol.3, No.2, pp.20～23, (1979).
- [9] 日本騒音制御工学会編：騒音制御工学ハンドブック、基礎編、技報堂出版、p.330、(2001).
- [10] 住友聡一・辻本三郎丸・北村泰寿：地盤振動の伝搬に及ぼす近接構造物の影響、日本音響学会秋季研究発表会、2-3-15, (1998).