

## トレンド推計の改善に向けた検討

### 1. はじめに

SNA 第一次年次推計では、基礎統計が得られない場合に、 $t$  年の値を推計するにあたって、前年の伸び率 ( $t-2$  年から  $t-1$  年にかけての伸び率) を用いて  $t-1$  年の水準を外挿するという手法が用いられている。この手法は「トレンド推計」と呼ばれているが、単年の振れを含むため、必ずしも一般的な意味での“トレンド”を推計しているわけではない。本稿では、より滑らかなトレンドを推計して外挿することでサンプル外予測を改善できる可能性があることを示す。

### 2. 代替的手法

$y_t$  は対象となる時系列データの  $t$  時点の観測値、 $\hat{y}_{t+1|t}$  は  $t$  時点までの情報に基づく  $t+1$  時点の予測値を指す。

#### 前年の伸び率

$$\hat{y}_{t+1|t} = y_t.$$

#### 過去 2 年の平均伸び率

$$\hat{y}_{t+1|t} = \frac{1}{2}(y_t + y_{t-1}).$$

#### HP フィルタ

Hodrick-Prescott filter (Hodrik and Prescott, 1997) (以下、HP フィルタ) はマクロ経済学において、トレンドとサイクル (+ノイズ) を分解する手法として広く用いられている<sup>1</sup>。次の最適化問題を解くことにより、観測値  $\{y_t\}_{t=1}^T$  からトレンド  $\{x_t\}_{t=1}^T$  を推計する。

$$\min_{\{x_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T (y_t - x_t)^2 + \lambda \sum_{t=3}^T (\Delta^2 x_t)^2.$$

$\lambda$  はトレンドの滑らかさをコントロールする係数、 $\Delta^r$  は  $r$  次の差分演算子である。マクロ経済学では Hodrik and Prescott (1997) による two-sided の定式化を用いることが多いが、ここでは Stock and Watson (1999) に倣って one-sided で定義している。平滑化計数  $\lambda$  を所与とすると、解析的に観測値  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)'$  からトレンド  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_T)'$  を求めることができる。

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{I}_T + \lambda \mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\mathbf{y},$$
$$\hat{y}_{t+1|t} = \hat{x}_t.$$

<sup>1</sup> 他にも、HP フィルタのベイズ推計 (Trimbur, 2006)、 $l_1$  フィルタ (Kim, et al., 2009; Tibshirani, 2014)、Dynamic Shrinkage Process (Kowal et al, 2019) などが選択肢として考えられるが、いずれも実装が難しいため、ここでは検討しない。

$D$ は2階の差分行列、 $I_T$ はT次元の単位行列である。この方法でトレンド $\{x_t\}_{t=1}^T$ を求めることは、次のような状態空間モデルにカルマンフィルタを適用することに相当する。

$$y_t = x_t + e_t, \quad x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + v_t.$$

$e_t, v_t$ は平均ゼロ、標準偏差 $\sigma_e, \sigma_v$ でそれぞれ独立に分布するとき、 $\lambda = \sigma_e/\sigma_v$ はシグナルノイズ比の逆数と解釈できる。

年次データでは、Ravn and Uhlig (2002)に倣って、 $\lambda = 6.25$ と設定することが多い<sup>2</sup>。 $\lambda$ を最尤法により推計することも考えられるが、極端に小さい値を選んでしまう傾向があるため、適当でない<sup>3</sup>。代替策としては、Hurvich et al. (1998)による修正赤池情報量基準(AICc)を最小にするような $\lambda$ を用いることが考えられる。

$$AICc(\lambda) = \sum_{t=1}^T (y_t - x_t)^2 + 2\delta + \frac{2\delta(\delta + 1)}{T - \delta - 1}, \quad \delta = \text{trace}\{(I_T + \lambda D' D)^{-1}\}.$$

AICc はノンパラメトリック回帰モデルの平滑化係数を決めるために提案されたものであるが、HP フィルタは多項式スプラインの特殊ケースと解釈できるため<sup>4</sup>、同様の正当化が可能である。

### 3. 実データを用いた比較

前述のトレンド推計の方法を「工業統計」(経済産業省)の食料品の品目別出荷額のサンプル外予測に適用し、相対的な予測力を評価する。1998年～2016年のデータから伸び率(対数階差)の系列を作成し、トレンドの外挿により1期先の伸び率をサンプル外予測する。品目の分割・統合がなく、一貫した系列が入手できる101系列を用いる<sup>5</sup>。比較する手法は、①前年の伸び率、②過去2年の伸び率平均、③HP フィルタ ( $\lambda = 6.25$ で固定)、④HP フィルタ (AICcにより $\lambda$ を選択)の4つである。データの使い方として、①トレーニングサンプルを10年から順に増やす、②10年のローリングサンプルをトレーニングサンプルとして用いる、という2つのケースを検討する。MSE(平均2乗誤差)とMAE(平均絶対誤差)により予測精度を評価する。

検証結果を表1～4にまとめている。表1と表2はそう菜および比較的近い食品の4品目に関する結果の例示、表3と表4は101系列全ての結果を整理したものである。前年の伸び率を用いたトレンド推計よりも、他の3つの方法の方がより良い予測を得られる傾向がみられる。とりわけ、AICcにより平滑化係数を選択する方法がとりわけ良好なパフォーマンスを示しており、トレンド推計の代替的手法として有望な選択肢となりうるのではないかと。

以上

<sup>2</sup> この選択の正当化については、de Jong and Sakarya (2016)も参照。

<sup>3</sup> Nelson and Plosser (1982); Hamilton (2018)を参照。

<sup>4</sup> Paige and Trindade (2010)を参照。

<sup>5</sup> すし・弁当は1998年以前がおにぎりとして統合されているため対象から外した。

## 参考文献

- de Jong, R. M., and Sakarya, N. “The Econometrics of the Hodrick-Prescott Filter”, *Review of Economics and Statistics*, 98, 310-317.
- Hamilton, J. D. (2018) “Why You Should Never Use the Hodrick-Prescott Filter”, *Review of Economics and Statistics*, 100, 831-843.
- Hodrick, R. J., and Prescott, E. C. (1997) “Postwar US Business Cycles: An Empirical Investigation”, *Journal of Money, Credit and Banking*, 29, 1-16.
- Hurvich, C. M., Simonoff, J. S., and Tsai, C. (1998) “Smoothing Parameter Selection in Nonparametric Regression Using an Improved Akaike Information Criterion”, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 60, 271-293.
- Kim, S., Koh, K., Boyd, S., and Gorinevsky, D. (2009) “ $l_1$  Trend Filtering”, *SIAM Review*, 51, 339-360.
- Kowal, D. R., Matteson, D. S., and Ruppert, D. (2019) “Dynamic Shrinkage Processes”, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 81, 781-804.
- Paige, R. L., and Trindade, A. A. (2010) “The Hodrick-Prescott Filter: A Special Case of Penalized Spline Smoothing”, *Electronic Journal of Statistics*, 4, 856-874.
- Ravn, M. O., and Uhlig, H. (2002) “On Adjusting the Hodrick-Prescott Filter for the Frequency of Observations”, *Review of Economics and Statistics*, 84, 371-380.
- Stock, J. H., and Watson, M. W. (1999) “Forecasting Inflation”, *Journal of Monetary Economics*, 44, 293-335.
- Tibshirani, R. J. (2014) “Adaptive Piecewise Polynomial Estimation via Trend Filtering”, *Annals of Statistics*, 42, 285-323.
- Trimbur, T. M. (2006) “Detrending Economic Time Series: A Bayesian Generalization of the Hodrick-Prescott Filter”, *Journal of Forecasting*, 25, 247-273.

表1 予測力評価の例（ケース①：サンプルを順に増やす）

品目	評価	前年の 伸び率	過去2年の 伸び率平均	HP フィルタ (固定)	HP フィルタ (AICc)
そう菜	MAE	1.000	0.756	0.758	<b>0.642</b>
	MSE	1.000	0.612	0.553	<b>0.460</b>
調理パン、サンドウィッチ	MAE	1.000	0.711	0.761	<b>0.670</b>
	MSE	1.000	0.621	0.689	<b>0.571</b>
レトルト食品	MAE	1.000	0.832	0.792	<b>0.791</b>
	MSE	1.000	0.941	0.860	<b>0.726</b>
冷凍調理食品	MAE	1.000	0.769	0.853	<b>0.737</b>
	MSE	1.000	0.660	0.694	<b>0.512</b>

(注) MAE/MSE は前年の伸び率による方法の値で正規化している。太字は最もパフォーマンスが良い方法であることを示す。

表2 予測力評価の例（ケース②：ローリングサンプル）

品目	評価	前年の 伸び率	過去2年の 伸び率平均	HP フィルタ (固定)	HP フィルタ (AICc)
そう菜	MAE	1.000	0.756	0.758	<b>0.632</b>
	MSE	1.000	0.612	0.554	<b>0.427</b>
調理パン、サンドウィッチ	MAE	1.000	0.711	0.762	<b>0.669</b>
	MSE	1.000	0.621	0.691	<b>0.579</b>
レトルト食品	MAE	1.000	0.832	0.794	<b>0.761</b>
	MSE	1.000	0.941	0.862	<b>0.836</b>
冷凍調理食品	MAE	1.000	0.769	0.855	<b>0.747</b>
	MSE	1.000	0.660	0.698	<b>0.491</b>

(注) MAE/MSE は前年の伸び率による方法の値で正規化している。太字は最もパフォーマンスが良い方法であることを示す。

表3 予測力の評価（ケース①：サンプルを順に増やす）

	前年の 伸び率	過去2年の 伸び率平均	HP フィルタ (固定)	HP フィルタ (AICc)
相対 MAE の平均	1.000	0.851	0.849	<b>0.778</b>
相対 MSE の平均	1.000	0.719	0.728	<b>0.598</b>
MAE に基づく平均順位	3.71	2.40	2.43	<b>1.47</b>
MSE に基づく平均順位	3.82	2.39	2.53	<b>1.26</b>

（注）太字は最もパフォーマンスが良い方法であることを示す。

表4 予測力の評価（ケース②：ローリングサンプル）

	前年の 伸び率	過去2年の 伸び率平均	HP フィルタ (固定)	HP フィルタ (AICc)
相対 MAE の平均	1.000	0.851	0.850	<b>0.781</b>
相対 MSE の平均	1.000	0.719	0.728	<b>0.614</b>
MAE に基づく平均順位	3.70	2.37	2.39	<b>1.54</b>
MSE に基づく平均順位	3.80	2.34	2.57	<b>1.29</b>

（注）太字は最もパフォーマンスが良い方法であることを示す。