で与えられるが、通常の統計的予測と異なる側面は $\Delta X_{1n}^{(a)} \in I_{n-1}$ となっていることである。

変数誤差 (errors-in-variables) モデル (4.1) を考察する。ここで任意の i, j $(i, j = 1, \cdots, n)$ に対し、

(i) トレンド・循環成分 $\Delta TC_{1j}, \Delta TC_{2j}$ と不規則成分 I_{1i}, I_{2i} が独立,

(ii) トレンド・循環成分 $\Delta TC_{1j}, \Delta TC_{2j}$ と不規則成分 I_{1i}, I_{2i}（期待値はゼロ）が正規分布にしたがう,

ことを仮定する。例えば $i = 2, \cdots, n$ に対して

$$\begin{bmatrix} \Delta TC_{1i} \\ \Delta TC_{2i} \\ \Delta TC_{1,i-1} \\ \Delta TC_{2,i-1} \\ I_{1i} \\ I_{2i} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \xi_{1,i} \\ \xi_{2,i} \\ \xi_{1,i-1} \\ \xi_{2,i-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{\xi_{1,i}\xi_{1,i}} & \sigma_{\xi_{1,i}\xi_{2,i}} & \sigma_{\xi_{1,i}\xi_{1,i-1}} & \sigma_{\xi_{1,n}\xi_{2,i-1}} & 0 & 0 \\ \sigma_{\xi_{2,i}\xi_{1,i}} & \sigma_{\xi_{2,i}\xi_{2,i}} & \sigma_{\xi_{2,i}\xi_{1,i-1}} & \sigma_{\xi_{2,i}\xi_{2,i-1}} & 0 & 0 \\ \sigma_{\xi_{1,i-1}\xi_{1,i}} & \sigma_{\xi_{1,i-1}\xi_{2,i}} & \sigma_{\xi_{1,i-1}\xi_{1,i-1}} & \sigma_{\xi_{1,i-1}\xi_{2,i-1}} & 0 & 0 \\ \sigma_{\xi_{2,i-1}\xi_{1,i}} & \sigma_{\xi_{2,i-1}\xi_{2,i}} & \sigma_{\xi_{2,i-1}\xi_{1,i-1}} & \sigma_{\xi_{2,i-1}\xi_{2,i-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \right)$$

(4.4)

と表現しよう。ここで $\xi_{1,i}, \xi_{2,i}$ は二つの系列の各 (トレンド・循環) 成分の階差系列 $\Delta TC_{1i}, \Delta TC_{2i}$, の期待値 (期待成長率) を意味する。$\sigma_{\xi_{1,i}\xi_{1,j}}, \sigma_{\xi_{2,i}\xi_{2,j}}, \sigma_{\xi_{1,i}\xi_{2,j}}$ は $\Delta TC_{1i}, \Delta TC_{2j}$ の分散と共分散、$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ は二つの不規則変動の分散と共分散をそれぞれ表している。

こうした仮定の下で予測問題を考察する。まず $\Delta X_{2,n-1}^{(a)}$ を利用して $\Delta X_{2n}^{(a)}$ の予測量を構成すると

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[\Delta X_{2n}^{(a)} | \Delta X_{2,n-1}^{(a)}] \\ = \ &\mathbf{E}[\Delta X_{2n}^{(a)}] + \frac{Cov(\Delta X_{2n}^{(a)}, \Delta X_{2,n-1}^{(a)})}{V(\Delta X_{2,n-1}^{(a)})} \left(\Delta X_{2,n-1}^{(a)} - \mathbf{E}[\Delta X_{2,n-1}^{(a)}] \right) \\ = \ &\left(\frac{\sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n-1}} - \sigma_{22}}{\sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n-1}} + 2\sigma_{22}} \right) \Delta X_{2,n-1}^{(a)} + \left(1 - \frac{\sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n-1}} - \sigma_{22}}{\sigma_{\xi_{2,n-1}\xi_{2,n-1}} + 2\sigma_{22}} \right) \xi_{2,n-1} \end{aligned} \tag{4.5}$$

とある。このときの予測の平均二乗誤差は

$$MSE_3 = (\sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n}} + 2\sigma_{22})[1 - \frac{(\sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n-1}} - \sigma_{22})^2}{(\sigma_{\xi_{2,n-1}\xi_{2,n-1}} + 2\sigma_{22})(\sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n}} + 2\sigma_{22})}] \tag{4.6}$$

で与えられる。次に直近の $\Delta X_{1n}^{(a)}$ が観測可能なことを考慮して $\Delta X_{2n}^{(a)}$ の予測量を構成すると

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\Delta X_{2n}^{(a)} | \Delta X_{1n}^{(a)}] \\ = & \mathbf{E}[\Delta X_{2n}^{(a)}] + \frac{Cov(\Delta X_{2n}^{(a)}, \Delta X_{1n}^{(a)})}{V(\Delta X_{1n}^{(a)})} \left(\Delta X_{1n}^{(a)} - \mathbf{E}[\Delta X_{1n}^{(a)}]\right) \\ = & \left(\frac{\sigma_{\xi_{1,n}\xi_{2,n}} + 2\sigma_{12}}{\sigma_{\xi_{1,n}\xi_{1,n}} + 2\sigma_{11}}\right) \Delta X_{1,n}^{(a)} + \left(1 - \frac{\sigma_{\xi_{1,n}\xi_{2,n}} + 2\sigma_{12}}{\sigma_{\xi_{1,n}\xi_{1,n}} + 2\sigma_{11}}\right) \xi_{1,n} \end{aligned} \tag{4.7}$$

である。このときの予測の平均二乗誤差は

$$MSE_3' = (\sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n}} + 2\sigma_{22})[1 - \frac{(\sigma_{\xi_{1,n}\xi_{2,n}} + 2\sigma_{12})^2}{(\sigma_{\xi_{1,n}\xi_{1,n}} + 2\sigma_{11})(\sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n}} + 2\sigma_{22})}] \tag{4.8}$$

で与えられる。

これに対して直近の ΔTC_{jn} の一部分を利用することが可能であれば ΔX_{2n} を予測するには

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta X_{2n}^{(a)} | \Delta TC_{1n}] &= \xi_{2n} + \frac{Cov(\Delta X_{2n}^{(a)}, \Delta TD_{1n}^{(a)})}{V(\Delta TD_{1,n})}(\Delta TC_{1n} - \xi_{1,n}) \\ &= \xi_{2n} + \frac{\sigma_{\xi_{1,n}\xi_{2,n}}}{\sigma_{\xi_{1,n}\xi_{1,n}}}(\Delta TC_{1n} - \xi_{1,n}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

となる。このときの予測の平均二乗誤差は

$$\begin{aligned} MSE_4 &= (\sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n}} + 2\sigma_{22})[1 - \frac{(\sigma_{\xi_{1,n}\xi_{2,n}})^2}{\sigma_{\xi_{1,n}\xi_{1,n}}(\sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n}} + 2\sigma_{22})}] \\ &= 2\sigma_{22} + \sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n}} \left[1 - \left(\frac{\sigma_{\xi_{1,n}\xi_{2,n}}}{\sqrt{\sigma_{\xi_{1,n}\xi_{1,n}}\sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n}}}}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{4.10}$$

で与えられる。ここで特に $\Delta TC_{1n} = \Delta TC_{2n} = \Delta TC_n$ とすると、変数誤差モデル (4.1) は変数誤差モデル (3.1) と同一になる。このとき最適予測 (4.9) は (3.7) に一致し、予測の平均二乗誤差は (4.10) の第 2 項がゼロとなる場合となっている[16]。

[16] 変数の取り方より σ_{11} は σ_{ss}、σ_{22} は σ_{dd} に対応する。

さらに、より一般的に直近の $\Delta TC_{1,n}$ および $\Delta TC_{1,n-j}, \Delta TC_{2,n-j}\ (j=1,\cdots,q)$ の情報を利用することで ΔX_{2n} のよい予測量を構成することが可能であろう。この場合には変数ベクトル $\mathbf{Z}_n = (\Delta TC_{1n}, \Delta TC_{1,n-1}, \Delta TC_{2,n-1}, \cdots, \Delta TC_{1,n-q}, \Delta TC_{2,n-q})$ の共分散行列を $\mathbf{V}$, 変数 ΔTC_{2n} と変数ベクトル $\mathbf{Z}_n$ の $(1\times(1+2q))$ 共分散ベクトル $\mathbf{Cov}(\Delta TC_{2n}, \mathbf{Z}_n)$ を用いて

$$
\mathbf{E}[\Delta X_{2n}^{(a)}|\mathbf{Z}_n] = \xi_{2n} + \mathbf{Cov}(\Delta TC_{2n}, \mathbf{Z}_n)\mathbf{V}^{-1}\begin{bmatrix} \Delta TC_{1,n}-\xi_{1n} \\ \Delta TC_{1,n-1}-\xi_{1,n-1} \\ \Delta TC_{2,n-1}-\xi_{2,n-1} \\ \vdots \\ \Delta TC_{1,n-q}-\xi_{1,n-q} \\ \Delta TC_{2,n-q}-\xi_{2,n-q} \end{bmatrix} \tag{4.11}
$$

により構成すればよい。こうした予測方法はラグを増やすことにより一般化することが可能である。このとき予測の平均二乗誤差は

$$
MSE_5 = \left[\sigma_{\xi_{2,n}\xi_{2,n}} + 2\sigma_{22}\right] - \left[\mathbf{Cov}(\Delta TC_{2n}, \mathbf{Z}_n)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Cov}(\Delta TC_{2n}, \mathbf{Z}_n)'\right] \tag{4.12}
$$

で与えられる。以上の議論を次のようにまとめておく。

定理2: 変数誤差モデル (4.1) において条件 (i), 条件 (ii) を仮定する。現在・過去のトレンド・循環成分および不規則成分に基づく予測の平均二乗誤差を最小にする予測量は (4.11) で与えられ、予測の平均二乗誤差は (4.12) となる。

直観的にはノイズ成分の相関が小さくトレンド・循環成分の自己相関がある程度あれば不規則変動の影響を取り除くことによりより良い予測を行える可能性がある。

予測を巡る注意事項3:

(i) ここでの予測の方法は同時点の情報と過去の情報を取り込むことを同時に考慮したものである。例えば経済の循環変動の存在などが存在するので3節で述べたよう

に原理的にはより良い予測方式を考えることができる。
(ii) さらにここでは真の季節性を除去できていることを仮定していることを注意する必要があろう。X-12-ARIMA の運用を前提とすると全体として整合的に季節調整を行うことはそれほど容易なことではない。Reg-ARIMA モデルで表現することが困難な場合には在庫 4 系列を統合した後に和系列に対して季節調整をほどこすことにより安定的な系列を得る可能性が高い。

在庫投資系列の分析結果

ここで利用した原データ 1980Q1〜2009Q2 間の実質民間在庫品増加（原材料）・実質民間在庫品増加（仕掛品）・実質民間在庫品増加（製品）・実質民間在庫品増加（流通）の 4 系列である。最初の 2 系列は 1 次速報段階では未知であるが残りの 2 系列の最新値は既知である。まず Decomp を利用して系列の変動要因を分解し、抽出した成分を用いて分析した結果の概略を報告する。在庫の系列についてはその作成方法の変更などがあるとのことなので、我々の分析において実際に統計的モデルの推定や予測において利用したのは 1994Q1〜2009Q2 の期間のデータである。したがって統計的な時系列の予測問題としてはデータ数はあまり多くない。関係者にとっては当然の事であろうが、設備投資に比較すると、在庫投資の予測可能性についてはかなりの困難性を確認した。
(i) 在庫 4 系列の時系列変化の統計的分析は簡単ではない。特に直近の在庫系列の変動を Decomp により分析すると不規則変動や循環成分は直近のデータをどこまで利用するかにかなり依存する。したがって通常の ARIMA モデル[17] が想定しているような時系列変動とはかなり様相が異なる。
(ii) 在庫系列はいずれも季節性の寄与が大きいが、その季節性は Decomp により比較的容易に抽出することが可能であることが分かった。トレンドの寄与は非常に小さいので残りは循環成分と不規則成分の予測が問題である。Decomp で推定された不規則成分には明らかに循環的成分が残っているが、これは ARIMA モデルでは推

[17] 例えば現在、内閣府が利用している季節調整法は X-12-ARIMA であるのでこのことの意味は小さくない。次節の議論を参照されたい。

定できない、循環的成分の存在をうかがわせる。

(iii) 在庫4系列を原材料と仕掛品は云わば風上と判断されるが、これを製品と流通という云わば風下の在庫から予測することはかなりの困難性が予想される。同時点の相関を計算すると非常に小さく検出されたので同時点の情報を利用して予測を行うことのメリットはあまり考えられない。

(iv) 現状では各変数についての Reg-ARIMA モデルを利用して予測を行っている。これに加えて他の在庫系列から求めたトレンド・循環成分を利用することを検討した。試行錯誤の結果、原材料在庫には流通在庫の過去値、仕掛品在庫には製品在庫の過去値がある程度は予測力を上げてくれることがわかったが、その程度は大きくない。

(v) 在庫系列の1次速報値・2次速報値を見るとかなり過去にさかのぼって変化しているケースなどが見られる。したがって予測力の良さの定義が問題となるが、あくまで $\Delta X_{2n}^{(a)}$ の事前的な予測力を比較した。

(vi) 1次速報・2次速報における在庫系列のかい離を予測方法を改善することでより小さくすることはかなり困難である。2次速報の在庫系列の数値にも不規則変動部分の実現値が含まれていると解釈すると、別の方法も考えられよう。

5. 季節調整についてのコメント

GDP 統計では季節調整には X-12-ARIMA を利用している。この場合には系列の推定と全体として季節調整とを整合的に行うことが重要である。X-12-ARIMA プログラムにより季節調整を繰り返すと、内部の X-11 移動平均フィルターにより時系列に対しある種の平滑化 (smoothing) が施されるが、他方、不必要なノイズを混入させる可能性が高い。

第一に、現在の設備投資系列の推定においては需要側の系列と供給系列の系列に別々に季節 ARIMA モデルを利用して系列を作成している。その後、合成した系列に対して再び異なる季節 ARIMA モデルを利用している。時系列分析では二つの異

なるARIMAモデルの合成系列は一般により高次のARIMAモデル[18]により表現されることが知られている。したがって首尾一貫な季節調整を行っているとは考えにくい。また在庫投資推計の方法においても季節性の扱いにおいて改善可能性がある。

第二に、現行の季節調整の実務では細かな分類項目において季節Reg-ARIMAモデルを識別し、選んだARIMAモデルを所与として個別に季節調整を行い、季節調整値を合計している。例えばARIMAモデルによる表現が適切とは思われないような系列に対してこうした作業を繰り返すと、改訂作業においてノイズを加えてしまう可能性がある。したがってどの程度まで集計した水準において季節調整を行うかなどを検討する必要があろう。特に乗法モデルを仮定して変換値に対し季節調整を行い、割り戻した系列を加重平均して再び季節調整を行っていることについての整合性が検討課題であろう。

第三に、多くのマクロ時系列モデルはここ数年間においてそれまでとは異なる大きな変動を見せている。系列の中にはこうした変動が一段落したものもあるが[19]、設備投資系列や在庫投資系列などはなお安定した季節パターンを再現するに至っていない。したがってこうした近年の変動についての今後の動向を注視し、X-12-ARIMAを利用するのであればReg-ARIMAモデルを改定していく必要があろう。

第四には季節調整の頻度の選択問題がある。現在のGDP速報における季節調整は年一度X-12-ARIMAプログラムで利用するReg-ARIMAモデルを識別し、毎期そのReg-ARIMAモデルを用いて季節調整を行っている。一般に毎期、統計的に最適な状態推定を行っているのであれば、新しい情報が入るたびに状態の推定値をそのつど更新することが望ましいことは学術的には明らかである。しかしながら、より現実的にX-12-ARIMAプログラムによる季節調整法の現在の運用を前提とすると、例えば計算途中で特定の時系列モデルを仮定して推定しているので、データを新たに更新した時に、母数の推定値の変更などを通して、毎回得られる季節調整値は継続性の観点から若干不安定化する可能性は否定できない。GDP全体から見れば一つ

[18] 例えば山本 (1987) に説明がある。

[19] 例えば高岡・国友 (2010) を参照されたい。

の実例にすぎないが4節で議論したように在庫投資系列のトレンド・循環成分の表現がReg-ARIMAにより適切に表現されているとは判断できない[20]。

このことは特に近年のマクロ経済において経験した大きな変動の中では重要な問題と認識する必要がある。したがって、詳細に数値的な実験を行ったわけではないが、少なくとも1次速報と2次速報で用いるReg-ARIMAモデルの推定値を変更する理由がそれほどあるとは言い難い。むろんこうした操作が煩雑な場合には代替的な案としては季節指数を1年間程度固定化して年1回の季節調整モデルの更新方式も考えられる。いずれにしても結果として得られる季節調整系列はより安定化する可能性が高いと判断する。

6. 状態空間モデルによる表現

本節では3節・4節・5節で述べた説明を一般的な状態空間モデルにより記述することにより、より一般的な統計的問題として考察しよう。複数の時系列(y_{1i}, y_{2i})が観察可能、これらの時系列を構成する（直接には観測できない）構成要素としてトレンド・循環成分、季節成分、不規則成分という状態変数$(TC_{1i}, TC_{2i}, S_{1i}, S_{2i}, I_{1i}, I_{2i})$の時間的な変動を同時に矛盾なく扱うことが必要である[21]。ここで観測される複数の時系列それぞれ(観測できない)複数の時系列成分(トレンド成分・季節性成分・不規則成分)から構成されている場合、推定される成分には必ず推定誤差が発生することを明示的に考慮することが重要である。また、3節のGDPの設備投資モデルでは供給サイドと需要サイドのトレンド・循環成分が同一なので制約条件$TC_{1i} = TC_{2i} = TC_i$を置く必要がある。

[20] 実際、X-12-ARIMAプログラムにおいて採用されるReg-ARIMAモデルは毎年変化している。特に在庫系列はかなり変化しているのでAICなどの評価基準による選択も結果として最終的に選択した統計モデルはいわば「僅差により選択されている」可能性が大きい。在庫4系列が典型的な例であるが各系列をそれぞれ分割してReg-ARIMAモデルを選択することが適切とは限らない。

[21] 循環成分も同様にして状態変数として組み込むことが可能であるが、例えば$AR(2)$を導入すると状態変数は2次元増加する。ここでは実際の季節調整済系列の作成では循環成分を取り出さないことを考慮して、議論を簡略化した。

比率 k の解釈

需要側・供給側データを同時に利用する内閣府モデルでは需要側・供給側の設備投資データから設備投資系列を構成するには二つの系列のウエイトを決定する必要が生じる。ここで需要側のウエイトを k(供給側を 1-k)、設備投資系列 $X_i = kX_{di} + (1-k)X_{si}\ (i = 1, \cdots, n)$ としておこう。状態空間モデルの観点からは供給側と需要側から得られる観測値の差は季節性と不規則変動によると解釈される。したがって制約条件の下では $kTC_{di} + (1-k)TC_{si} = TC_i\ (i = 1, \cdots, n)$ より TC 系列の合成値は需要側・供給側のウエイトには依存しないことになる。むろん観察される原系列および (推定する対象である) 季節調整済系列では季節成分と不規則変動成分がそれぞれ $S_i = kS_{di} + (1-k)S_{si}, I_i = kI_{di} + (1-k)S_{si}$ より $X_i^{(a)} = TC_i + I_i, X_i = X_i^{(a)} + S_i\ (i = 1, \cdots, n)$ と表現するとその数値は比率 k に依存する[22] 。供給側と需要側の季節性、循環成分、不規則変動の時系列変動の分析からは二つの系列の変動の大きさはほぼ同等であることが推定された。現在の設備投資系列の構成方法を所与とすると二つの系列の加重和比率の見直しは不規則変動成分の構成を変化させるので慎重に検討すべき、ということになろう[23] 。

---

[22] 内閣府マニュアル (2010) によれば比率はトレンド・循環成分を除いた二つの標本誤差系列の無相関性を仮定した下で、同時点の需要系列と供給系列の線形和の範囲で標本誤差分散の最小化に基づき、k は分散誤差の標本誤差の比率により決定している。この場合には比率は標本分散の大きさに逆比例する。本節の枠組みでは、設備投資系列の不規則変動成分を $I_i^{(*)}$ とすると (季節調整済・設備投資系列)$_i = TC_i + I_i^{(*)}\ I_i^{(*)} = k^* I_{di} + (1-k^*)I_{si}, k^* = \mathrm{argmin}_{0<k<1}\mathbf{E}[kI_{di} + (1-k)I_{si}]^2$ と解釈されよう。この場合には供給側・需要側の不規則変動成分の間に相関がなければ $\mathcal{E}[I_i^{(*)}]^2 < \min\{\sigma_{dd}, \sigma_{ss}\}$ となる。例えば $\sigma_{dd} = \sigma_{ss} = \sigma^2$ とすると分散は $(1/2)\sigma^2$ になるので、元の 2 系列よりも不規則変動成分の変動は小さくなる。時系列成分の分析からは確かにこの相関は小さいことが確認できた。ただし本稿の議論の枠組みによれば「真の設備投資系列」としては「複数の設備投資系列に共通する (トレンド+循環) 成分と定義する」ことがより整合的ということになろう。

[23] なお我々の見解として見直しが必要ないと云っているのではないことを強調しておく。現在の比率はある時点における標本誤差分散の評価に基づいているのでそれを文字通り受け取ると標本誤差分散の推定精度の評価問題となり根本的ではあるがかなり論争的な問題となる。こうした問題を回避するには、例えば標本誤差とは異なる観測される時系列データより推定される不規則変動成分により整合的に比率を推定することも可能であろう。今回は検討しなかったが、本節の議論は消費系列の推定についても同様に適用できよう。内閣府 GDP マニュアル (2010) によれば GDP 速報では消

状態空間モデル

観測可能な二次元時系列の変動を表現するために、観測変数ベクトル $\mathbf{y}_i = (y_{1i}, y_{2i})'$, 状態変数ベクトル $\mathbf{x}_i' = (TC_i, S_{1i}, S_{1,i-1}, S_{1,i-2}, S_{2i}, S_{2,i-1}, S_{2,i-2})$, $\mathbf{v}_i = (v_{1i}, v_{2i}, v_{3i})'$,

$$\begin{pmatrix} TC_i \\ S_{1i} \\ S_{1,i-1} \\ S_{1,i-2} \\ S_{2i} \\ S_{2,i-1} \\ S_{2,i-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} TC_{i-1} \\ S_{1,i-1} \\ S_{1,i-2} \\ S_{1,i-3} \\ S_{2,i-1} \\ S_{2,i-2} \\ S_{2,i-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ v_{3i} \end{pmatrix}$$

と置けば

(6.1) $$\mathbf{x}_i = \mathbf{F}\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{G}\mathbf{v}_i$$

という状態方程式 (state equation) を得る (行列 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ は上で定義する)。観測方程式 (observation equation) は行列

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

不規則変動 $\mathbf{I}_i = (I_{1i}, I_{2i})'$ と置けば、結局の所

(6.2) $$\mathbf{y}_i = \mathbf{H}\mathbf{x}_i + \mathbf{I}_i$$

と表現できる。なおここでトレンド・循環成分モデルとして $\Delta TC_i = v_{1i}$, 季節成分モデルとして $\sum_{j=0}^{3} S_{1,i-j} = v_{2i}, \sum_{j=0}^{3} S_{2,i-j} = v_{3i}$ を仮定した。ここで変数誤差モデルにおける基本的な確率変数ベクトルは

$$\mathbf{w}_i = (v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}, I_{1i}, I_{2i})$$

費についても需要側・供給側のデータを用いて最終消費系列を推定している。

であるので5次元の確率分布が必要となる。3節では季節成分 (v_{2i}, v_{3i}) を所与としたのであたかも3次元モデルのように扱った。同様に4節の議論は二つのトレンド・循環成分があるので6次元モデルを説明した、季節成分を除くと最小でも4次元モデルとなる。一般には状態変数ベクトル $\mathbf{x}_i$ はそれぞれ7次元と8次元である。

こうした状態変数が高次元で観測誤差を含む時系列の分析はしばらく前までは非常に困難であった。したがってX-12-ARIMAモデルに代表されるような実用的ではあるが理論的には明確でない方法が実務的に開発されたのである。近年の計算統計学の進歩の中ではこうした問題を状態空間モデルとして定式化し、状態を推定することは可能である。例えばトレンド・循環成分の期待値は一定、季節成分と不規則成分に対応するノイズの期待値はゼロとして、基本的な変動要因を表現する確率変数ベクトル $\mathbf{w}_i$ が互いに独立に多次元正規分布 $N_5(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ にしたがうと仮定しよう。このとき尤度関数は2次元条件付密度関数[24] $f_i(\mathbf{y}_i|\mathbf{y}_{i-1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ とすると、

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{y}_0|\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{y}_i|\mathbf{y}_{i-1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \tag{6.3}$$

となる。初期値 $\mathbf{y}_0$ を設定すれば最適化することにより母数(対称)行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を推定することができる。この場合には母数が与えられれば(フィルタリング分野ではよく知られている)古典的なカルマン・フィルターを利用して7次元の状態変数ベクトル $\mathbf{x}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ を推定・更新、さらには予測を相互に矛盾することなく行うことが可能である[25]。

近年ではさらに非ガウス分布や非線形時系列モデルを仮定した場合の状態推定の問題も様々に研究されている。したがって、政府統計にとり重要なBenchmark問題、異常値問題、構造変化問題、など公表マクロ時系列をめぐる様々な扱いが必要とされる時にも、首尾一貫して分析を行うことが可能であることにも言及しておく。本節ではもっともGDP統計にとり有用と判断した範囲に限って説明した。

---

[24] この場合には期待値ベクトル, 共分散行列が過去に依存する多次元正規分布になる。

[25] 手に入りやすい状態空間モデルについて入門的文献として北川(2005)を挙げておく。基本的アルゴリズムは既に開発されている。

7. 結論

本稿ではGDP統計の作成における1次速報と2次速報の乖離について改善可能性について論じた。比較的容易に実現できる方法としてトレンド・循環成分をより積極的に利用すればよいことを説明した。1次速報公表時点で利用可能でない原データを推定しようとすると予測誤差が発生する。予測誤差を分解すると季節変動成分による予測誤差、トレンド・循環成分による予測誤差、不規則変動成分による予測誤差が考えられる。

第一に季節変動成分が安定して推定できれば第一の誤差は小さくなるので、適切な季節調整の問題が重要となる。第二に不規則変動成分はその定義から予測可能ではないので、予測可能でないことを認めた上で議論することが議論を混乱させないために重要である。第三にトレンド・循環変動成分の中では近年の日本のように潜在成長率が低くなるとトレンド成分の影響が以前よりも小さくなり循環成分の影響がより大きくなる、循環変動についての統計的な時系列予測の役割が重要になる。その際、不規則変動成分とトレンド・循環成分との分離と予測への利用が重要であることが本稿の議論の主要な結論である。

次にこうした当面の論点に加えて、根本的にはGDP統計における各系列の処理においてトレンド・循環成分を状態変数としてとらえ、利用可能な現在・過去の推定値を利用、更新していくことの重要性を指摘しておく。例えば政府関係者やエコノミストの関心がGDP水準の変動ではなく、GDP変化率の変動であれば、GDP速報におけるGDP変化率の推定には不規則変動を除いたトレンド・循環成分に基づいて計算することがより安定的な推定に結びつくことが予想される。さらに、直近の伸び率を予測するには利用可能な情報よりトレンド・循環成分を利用することが重要であるが、同時に予測の発射台としての候補を前期の実現値に限定しなければ、前期のトレンド・循環成分水準の推定値の精度も問題となりうるであろう。トレンド・循環成分という状態に関する直近の推定値はかなり誤差を伴うことが予想されるので、そうした状態推定の誤差も考慮した推定方法を開発する必要がある[26]。

[26] 佐藤・国友(2009)は少し異なる観点からこの問題を議論している。状態推定においては新たな

最後になるが、本稿で議論したGDP速報の推定問題は多次元の変数誤差モデルにおける状態推定、多次元時系列における最適フィルタリングと予測の問題としてとらえることが自然であることを再び強調しておく。現在のGDP速報は内閣府国民経済計算部が時代の要請に合う形を目指して需要側と供給側において利用可能な統計を統合する形で開発してきた。例えば需要側の統計と供給側の統計の結合比重などについて時代と共にどの様に変更させていくか、と言った幾つかの解決すべき問題がある[27]。こうした問題に関連して現行の季節調整法であるX-12-ARIMAとは必ずしも整合的でない、ことに注意すべきであろう。毎期観測されている多くの経済時系列が様々な変動成分から構成されているとすると、事前の情報によっては予測することが困難な部分が存在することを認め、それを不規則変動成分、あるいは観測誤差として統計的に処理することで季節的変動成分やトレンド・循環成分を状態変数として推定、予測、更新していく系統的な方法を開発すべきであろう。本稿ではGDPに関する当面の課題を例として説明したが、6節で説明した状態空間モデルを用いれば理論上は多くの問題は容易に解決できるが、計算を数値的に実現するには課題もあるので、今後さらなる検討が必要であろう。

情報が利用可能になると状態の推定値は更新されるが、特に直近の状態の推定値は不安定化しやすい。こうした問題については十分に検討する余裕がなかったので今後の検討課題とする。

[27] 3節で説明したようなGDP速報における設備投資推計モデルでは供給側と需要側の設備投資のトレンド・循環成分が一致している必要がある。例えばX-12-ARIMAによる状態推定ではこの制約を満たさない。

参考文献

[1] 北川源四郎 (2005)「時系列解析入門」, 岩波書店。

[2] 国友直人「季節調整法 X-12-ARIMA と日本の官庁統計」2006, CIRJE-R-5(研究報告), 東京大学日本経済国際共同研究センター (CIRJE)。

[3] 高岡慎・国友直人 (2010)「最近のマクロ経済変動と季節調整 (貿易統計を題材に)」,CIRJE DP-J-219 (http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research)。

[4] 佐藤整尚・国友直人 (2010)「景気判断と平滑化問題 (GDP 公表値を巡って)」, CIRJE DP-J-218 (http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research)。

[5] 内閣府・国民経済計算部 (2010)「四半期別 GDP 速報の推計方法」, (平成 18 年 7 月改定)。

[6] 山本拓 (1987)「経済の時系列分析」(創文社)。

付録：幾つかの図

ここではDecompプログラムを利用した推定結果の図を示しておく。いずれも原系列（orijinal）に対し加法的に成分分解モデルを適用して得られた図である。trendはトレンド成分,seasonalは季節成分, noiseは不規則成分, AR processは循環成分,Adjustedは季節調整系列を表している。TC成分は(トレンド成分)+(AR成分), 季節調整系列は(原系列)-(季節成分)により求めている。

図3.1は設備投資系列の分析結果、図4.1-4.4(Fig 4.1-4.4)は在庫投資系列を構成する4系列、図4.5(Fig 4.5)は在庫投資の集計系列の分析結果に対応している。最後の図は設備投資に関して行った予測力の比較の図である。