補論：固定資本マトリックス及び固定資本ストックマトリックスの試算方法

固定資本マトリックス（JSNA-FCFM）の作成から固定資本ストックマトリックス（JSNA-FCSM）を作成し固定資本減耗額（CFC）を算出するまでの流れ

１． JSNA-FCFM（フロー）の作成

（1）財別固定資本形成額、産業別固定資本形成額の時系列の作成

（2）基準となる年次の固定資本マトリックス（JSNA-FCFM）の作成

（3）JSNA-FCFM の長期時系列の作成

JSNA-FCFM の長期時系列（1955-2008）

２． JSNA-FCSM（ストック）の作成と CFC（固定資本減耗）の算出

（1）ベンチマークストック額の設定

（2）時系列投資額の償却

（3）恒久棚卸法（PIM）による固定資本ストックマトリックス（JSNA-FCSM）の作成

（4）固定資本減耗額（CFC）の計算

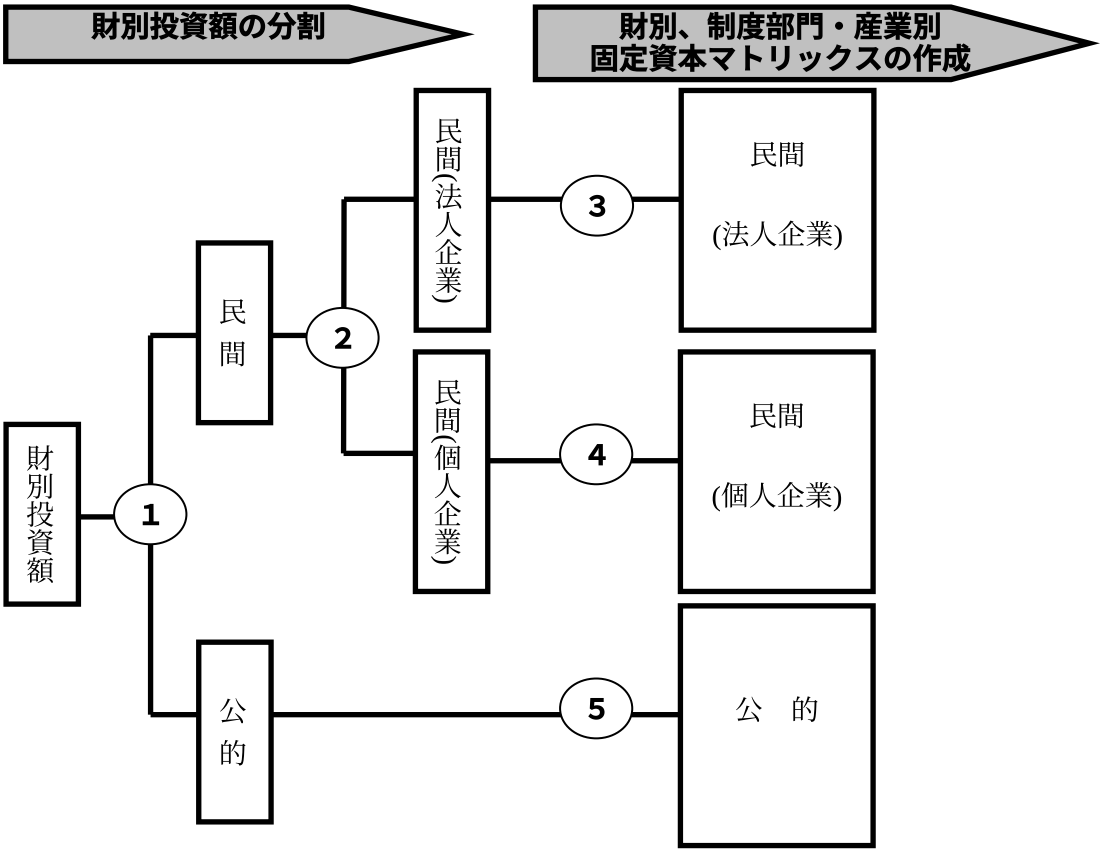
JSNA-FCSM の長期時系列（1955-2008）
CFC の長期時系列（1956-2008）

１．JSNA-FCFM の作成

（1）財別固定資本形成額、産業別固定資本形成額の時系列の作成

JSNA のコモディティフローのデータから、一国全体の財別固定資本形成額（コモ法財８桁分類）の時系列を作成する。建設物に関しては公共事業関係の各種統計を利用して細分化する。今回の試算における資本財の種別は 475 品目となった。

産業別固定資本形成額については、JSNA の 7 制度部門別固定資本形成額の時系列を基準とし、さらに民間部門については法人企業統計など各種統計を、公的部門については各事業の決算書や各機関の財務諸表などを利用して計 41 部門に分割した。



（2）基準となる年次の固定資本マトリックス（JSNA-FCFM）の作成

はじめに現行 JSNA の基準年である平成 12 年(2000 年)について JSNA-FCFM を作成し､次に IO-FCFM が存在する下記の年次について、同様に JSNA-FCFM を作成する。これらを総称して基準年 JSNA-FCFM と呼ぶ。

(IO-FCFM が存在する年)

昭和 45（1970)年、50（1975)年、55（1980)年、60（1985)年

平成 2（1990)年、7（1995)年、12（2000)年、17（2005)年

JSNA-FCFM の作成手順は以下の通りである。まず JSNA の制度部門別固定資本形成額をもとにして、一国全体の財別固定資本形成額の列ベクトルを民間法人・民間個人・公的の列ベクトルに３分割する（図中の①②)。次に各制度部門について、分割した財別列ベクトルを行和、産業別投資額を列和となるようにバランス調整して、固定資本マトリックスを作成する（③～⑤)。

今回の試算では、制度部門別から民間法人、民間個人、公的それぞれの内部の分割までの全ての

工程で RAS 法[1]を用いた。その際に初期値の縦比（各部門の投資額における資本財構成比）として、産業連関表（Input-Output Tables）基本表の付帯表である固定資本マトリックス（IO-FCFM）から計算した比率を用いた。本推計で民間法人と民間個人の内部を分割（③④）する際には、産業連関表による縦比制約に加えて、内閣府実施の民間企業投資・除却調査（CED）の結果による各資本財の産業別投入比率の情報を横比制約として与え、縦比・横比の総合的な誤差をラグランジュ法によって最小化する方法（KEO-RAS 法）によって計算し、より精緻な固定資本マトリックスを作成する予定である。（手法の詳細については、文末の（参考）を参照）

（３）JSNA-FCFM の長期時系列の作成

（２）で JSNA-FCFM を作成した年次以外についても、財別列ベクトルを行和、産業別投資額を列和となるようにバランス調整して JSNA-FCFM を作成する。RAS 法でバランス調整する際には、前後に基準年が存在する補間年では前後の基準年 JSNA-FCFM を線形補間した行列の情報を、1970 年以前（遡及年）および 2006 年以降（延長年）については直近の基準年 JSNA-FCFM を、縦比の情報として利用した。本推計では、基準年 JSNA-FCFM の作成作業と同様に KEO-RAS 法による計算に変更する予定である。

２．PIM によるストック額と減耗額の推計

（１）ベンチマークストック額の設定

ベンチマークとしては、昭和 30（1955）年国富調査による純ストック額を用いるが、社会資本については、経済企画庁「経済審議会地域部会報告検討資料集」（昭和 43（1968）年）および内閣府「日本の社会資本」による粗ストック額を、純ストックに変換して用いた。ただし昭和 30 年国富調査の財および産業の分類が粗いため、適用する分類にあわせて分割する必要がある。

現試算段階では、1955 年 FCFM に各財の償却率と各産業の投資額の年平均成長率を用いて 1955 年時点の暫定純ストック額を求め、昭和 30 年国富調査の値をその比率で按分している。

（国富調査の分類をさらに分割するために使用する暫定純ストック額の計算）

$$NS_{i,j,1955} = I_{i,j,1955} + I_{i,j,1955} \times \frac{1-\delta_{i,j,1955}}{1+g_{i,j}} + I_{i,j,1955} \times \frac{(1-\delta_{i,j,1955})^2}{(1+g_{i,j})^2} + I_{i,j,1955} \times \frac{(1-\delta_{i,j,1955})^3}{(1+g_{i,j})^3} + \cdots$$

$$= I_{i,j,1955} \times \frac{1+g_{i,j}}{g_{i,j}+\delta_{i,j,1955}}$$

$$B_{i,j,1955} = B_{i^*,j^*,1955} \times \frac{NS_{i,j,1955}}{\sum_i \sum_j NS_{i,j,1955}}$$

$NS_{i,j,1955}$：1955 年における j 産業の i 財の暫定純ストック額
$I_{i,j,1955}$：1955 年における j 産業の i 財への投資額
$g_{i,j}$： j 産業の i 財への投資額の年平均成長率（1955-60 年）
$\delta_{i,j,1955}$： j 産業において 1955 年に投入された i 財の償却率
$B_{i^*,j^*,1955}$：昭和 30 年国富調査における j^* 産業の i^* 財のストック額　（$i \in i^*, j \in j^*$）
$B_{i,j,1955}$：　j 産業の i 財のベンチマークストック額（ベンチマーク FCSM）

[1] RAS 法は、リチャード・ストーン（Richard Stone）により開発された方法であり、時間過程で起こる投入係数の変動を(1)加工度変化（effect of fabrication）と(2)代替変化（effect of substitution）の２方向に分解して要因分析を行う方法で、マトリックス上の縦及び横の構成比の変化を推計するのに用いている。

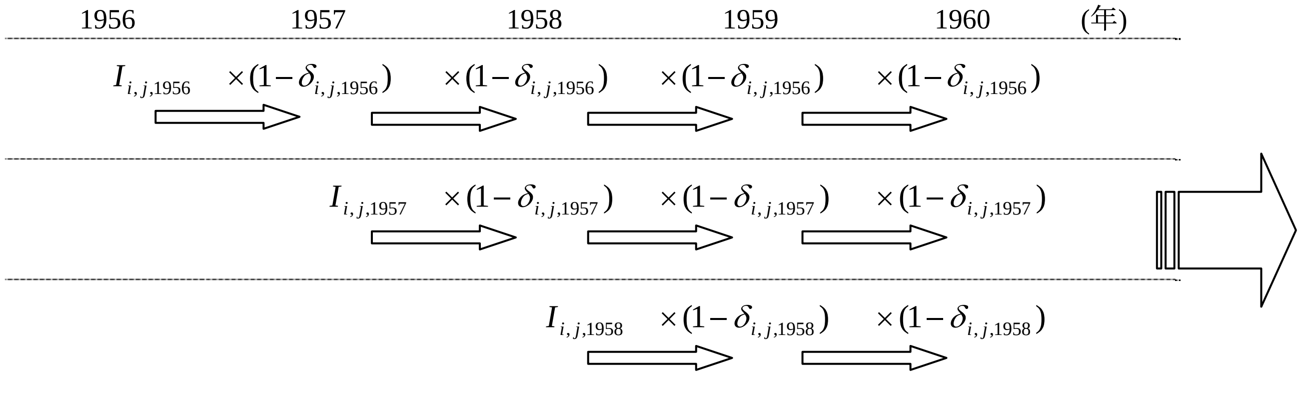
ベンチマークストック額の設定に用いた統計一覧

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="3">民間法人</td><td colspan="3">民間個人</td><td colspan="3">公的企業</td><td colspan="9">一般政府</td><td rowspan="3">家計</td><td rowspan="3">民間非営利</td></tr>
<tr><td>100</td><td>…</td><td>3800</td><td>100</td><td>…</td><td>3800</td><td>100</td><td>…</td><td>3800</td><td>4100</td><td>4200</td><td>4300</td><td>4400</td><td>4500</td><td>4600</td><td>4610</td><td>4620</td><td>4630</td></tr>
<tr><td>農業</td><td></td><td>その他のサービス業</td><td>農業</td><td></td><td>その他のサービス業</td><td>農業</td><td></td><td>その他のサービス業</td><td>一般政府・下水道</td><td>一般政府・廃棄物</td><td>一般政府・教育</td><td>一般政府・医療</td><td>一般政府・学術</td><td>一般政府・公務</td><td>道路関係公共事業</td><td>河川・下水道・その他の公共事業</td><td>農林関係公共事業</td></tr>
<tr><td>1140104　かんきつ類植物生長</td><td colspan="3" rowspan="7">55年国富調査(⑥法人)による産業別純ストック額を使用</td><td colspan="3" rowspan="7">55年国富調査(⑦個人事業体等)による産業別純ストック額を使用</td><td colspan="3" rowspan="7">55年国富調査(③政府関係機関、⑤地方公営企業)による純ストック額を使用</td><td colspan="9" rowspan="7">55年国富調査(①国、④地方公共団体･公共組合)による純ストック額を使用</td><td rowspan="7">55年国富調査（⑧家計）による純ストック額を使用</td><td rowspan="7">55年国富調査（⑥⑦の「非営利法人」）による純ストック額を使用</td></tr>
<tr><td>… …</td></tr>
<tr><td>90000000　分類不明</td></tr>
<tr><td>99000001　住宅建築（木造）</td></tr>
<tr><td>99000002　住宅建築(非木造)</td></tr>
<tr><td>99000003　非住宅建築(木造)</td></tr>
<tr><td>99000004　非住宅建築(非木造)</td></tr>
<tr><td>99000005　その他の土木建設（上･工業用水道、土地造成、その他土木）</td><td colspan="20">55年国富調査によるトータル純ストック額に整合するように差分を算定</td></tr>
<tr><td>99000006　道路関係公共事業</td><td colspan="20">『経済審議会地域部会報告検討資料集』による粗ストック額(1963年価格)を、純変換･2000年価格化して使用</td></tr>
<tr><td>99000007　河川･下水道･その他の公共事業</td><td colspan="20">『経済審議会地域部会報告検討資料集』による粗ストック額(1963年価格)を、純変換･2000年価格化して使用</td></tr>
<tr><td>99000008　農林関係公共事業</td><td colspan="20">『経済審議会地域部会報告検討資料集』による粗ストック額(1963年価格)を、純変換･2000年価格化して使用</td></tr>
<tr><td>99000009　鉄道軌道建設</td><td colspan="20">『経済審議会地域部会報告検討資料集』による粗ストック額(1963年価格)を、純変換･2000年価格化して使用</td></tr>
<tr><td>99000010　電力施設建設</td><td colspan="20">『日本の社会資本』による粗ストック額(2000年価格)を、純変換して使用</td></tr>
<tr><td>99000011　電気通信施設建設</td><td colspan="20">『経済審議会地域部会報告検討資料集』による粗ストック額(1963年価格)を、純変換･2000年価格化して使用</td></tr>
</table>

（２）時系列投資額の償却

過去の年ごとの投資額を以下の様に償却していく。償却率に関する考え方は、野村(2004)[2]の検証結果などを踏まえ、また OECD (2009)[3] などでも推奨されて通り、定率による償却とする。ただし使用する主体の法人・個人別、産業別、および資本財の製造年代別に償却率を変化させている。また資本財の償却パターンが幾何分布以外の分布に従い、償却率が使用年数に応じて可変とする場合でも対応できるようなシステムを構築している。

概念上の償却の流れ



2 野村浩二（2004）『資本の測定－日本経済の資本深化と生産性－』慶應義塾大学出版会。
3 OECD (2009) *Measuring Capital: OECD Manual 2nd edition.*

（3）恒久棚卸法（PIM）による固定資本ストックマトリックス（JSNA-FCSM）の作成

償却済みストック額を年度ごとに集計し、時系列の JSNA-FCSM を作成する。

$$
\begin{cases}
S_{i,j,1955} = B_{i,j,1955} \\
S_{i,j,t} = B_{i,j,1955} \times (1-\delta_{i,j,1955})^{t-1955} + \sum_{\tau=1956}^{t} I_{i,j,\tau} \times (1-\delta_{i,j,\tau})^{t-\tau} \quad t \geq 1956
\end{cases}
$$

$\begin{cases} S_{i,j,t} \\ \delta_{i,j,\tau} \end{cases}$

$S_{i,j,t}$ ：t 年における j 産業の i 財のストック額（FCSM）

$\delta_{i,j,\tau}$ ： j 産業において τ 年に投入された i 財の償却率

PIM による資本ストックの積み上げの概念図

	1955 国富	1956 投資	1957 投資	1958 投資		FCSM
1955	$B_{i,j,1955}$					$S_{i,j,1955}$
1956	$B_{i,j,1955}$ $\times(1-\delta_{i,j,1955})$	$I_{i,j,1956}$				$S_{i,j,1956}$
1957	$B_{i,j,1955}$ $\times(1-\delta_{i,j,1955})^2$	$I_{i,j,1956}$ $\times(1-\delta_{i,j,1956})$	$I_{i,j,1957}$			$S_{i,j,1957}$
1958	$B_{i,j,1955}$ $\times(1-\delta_{i,j,1955})^3$	$I_{i,j,1956}$ $\times(1-\delta_{i,j,1956})^2$	$I_{i,j,1957}$ $\times(1-\delta_{i,j,1957})$	$I_{i,j,1958}$		$S_{i,j,1958}$
1959	$B_{i,j,1955}$ $\times(1-\delta_{i,j,1955})^4$	$I_{i,j,1956}$ $\times(1-\delta_{i,j,1956})^3$	$I_{i,j,1957}$ $\times(1-\delta_{i,j,1957})^2$	$I_{i,j,1958}$ $\times(1-\delta_{i,j,1958})$	…	$S_{i,j,1959}$
			：			

（4）固定資本減耗額（CFC）の計算

各年の前年のストック額に財別償却率を乗じることで固定資本減耗額を計算する。

$$
\begin{cases}
CFC_{i,j,1956} = B_{i,j,1955} \times \delta_{i,j,1955} \\
CFC_{i,j,t} = B_{i,j,1955} \times \delta_{i,j,1955}{}^{t-1955} + \sum_{\tau=1956}^{t} I_{i,j,\tau} \times \delta_{i,j,\tau}{}^{t-\tau} \quad t \geq 1957
\end{cases}
$$

$CFC_{i,j,t}$ ：t 年における j 産業の i 財の固定資本減耗

PIM による固定資本減耗の積み上げ概念図

	1955 国富	1956 投資	1957 投資	1958 投資		FCSM
1956	$B_{i,j,1955} \times \delta_{i,j,1955}$					$CFC_{i,j,1956}$
1957	$B_{i,j,1955} \times \delta_{i,j,1955}{}^{2}$	$I_{i,j,1956} \times \delta_{i,j,1956}$				$CFC_{i,j,1957}$
1958	$B_{i,j,1955} \times \delta_{i,j,1955}{}^{3}$	$I_{i,j,1956} \times \delta_{i,j,1956}{}^{2}$	$I_{i,j,1957} \times \delta_{i,j,1957}$			$CFC_{i,j,1958}$
1959	$B_{i,j,1955} \times \delta_{i,j,1955}{}^{4}$	$I_{i,j,1956} \times \delta_{i,j,1956}{}^{3}$	$I_{i,j,1957} \times \delta_{i,j,1957}{}^{2}$	$I_{i,j,1958} \times \delta_{i,j,1958}$	…	$CFC_{i,j,1959}$
			:			

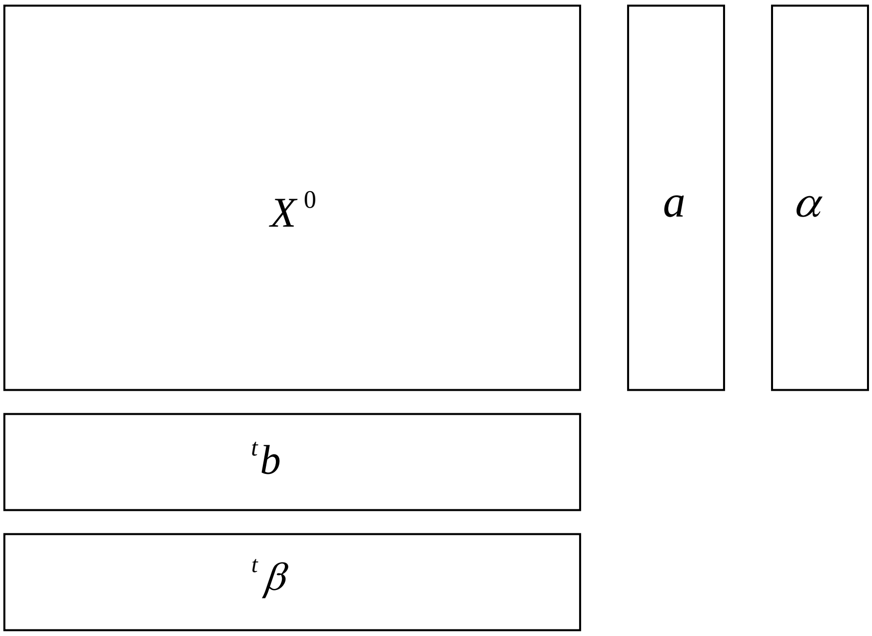
試算に使用した主なデータ一覧

分　類		使用データ
財別固定資本形成額	財別データ	CMBASE (1955～2007 年)、行政投資（総務省）、建設業務統計、道路統計年報、公共工事着工統計(国土交通省)
制度部門・産業別固定資本形成額	産業別データ(民間) 民間非営利	国民経済計算(金融・保険業の投資額)（内閣府） 民間企業資本ストック（内閣府） 法人企業統計(財務省) 工業統計(経済産業省)
	一般政府・公的企業	行政投資、科学技術研究調査、地方公営企業年鑑、地方財政統計年報(総務省)、林業統計要覧、農業・食糧関連産業の経済計算(農林水産業)、建設業務統計、道路統計年報、公共工事着工統計(国土交通省)、文部科学統計要覧(文部科学省)、特別会計予算、財政金融統計月報(財務省) ただし野村浩二慶大准教授により提供されたデータを含む
JSNA-FCFM の構成比	財別の制度部門別・産業別の配分比（横比）	産業連関表取引基本表ー固定資本マトリックス(民間／公的)(総務省)、民間企業投資・除却調査（内閣府） CMBASE（1955～2007 年）
	民間部門の財別配分比（縦比）	産業連関表取引基本表ー固定資本マトリックス(民間)(総務省) CMBASE（1955～2007）
	公的部門の財別配分比(縦比)	産業連関表取引基本表ー固定資本マトリックス(公的)(総務省) CMBASE（1955～2007 年）
ベンチマーク		昭和 30 年国富調査、経済審議会地域部会報告資料集、日本の社会資本（内閣府）
償却率		民間企業投資・除却調査（内閣府）、野村准教授提供データ
デフレータ		内閣府経済社会総合研究所データ（1955～2007 年）

（参　考）マトリックス・バランシング（Matrix Balancing）の方法[4]
－RAS 法と Lagrange 関数による最適化法－

１．Matrix Balancing

次のような表を考えよう。



たとえば、$n \times m$ 行列 $X^0 = \left[x_{i,j}^0 \right]$ は省庁共同で作成・公表される産業連関表である。このとき、$n \times 1$ ベクトル a および $m \times 1$ ベクトル b は、それぞれ産業連関表の列および行のコントロール・トータルスである。すなわち、

$$a = X^0 \iota$$

$$b = {}^t X^0 \iota$$

である。ただし ${}^t \iota = [1, \quad 1, \quad \cdots \quad 1]$ である。

さらに、全体のバランスより、

$${}^t a \iota = {}^t b \iota$$

が成立している。

ここで一般に Matrix Balancing の問題とは次のようなものである。

$n \times m$ の行列 X と n 次のベクトル α 、m 次のベクトル β が与えられたとき、 X^0 の近似として

[4] 黒田昌裕、新保一成、野村浩二、小林信行（1997）『KEO データベース－産出および資本・労働投入の測定－』慶應義塾大学産業研究所、より抜粋。

$$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = \alpha_i \ , \quad i = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = \beta_j \ , \quad j = 1, \cdots, m$$

を満たす X を求めよ。

たとえば、α , β は国民経済計算で与えられるコントロール・トータルである。このような Matrix Balancing の問題を解くアルゴリズムとしてスケーリング手法の RAS 法と最適化による KEO-RAS 法について説明する[5]。

２． RAS 法

RAS 法は、行と列の両面から制約 α と β を満たすまで行列 X^0 をスケーリングしていくアルゴリズムである。RAS 法のアルゴリズムは次のように定義される。

Step 0 $k = 0$ とする。

Step 1（行のスケーリング）$i = 1, \cdots, n$ に関して

$$\rho_i^k = \frac{\alpha_i}{\sum_j x_{i,j}^k}$$

を計算して

$$x_{i,j}^k \leftarrow \rho_i^k x_{i,j}^k \ , \quad i = 1, \cdots, n \ , \ j = 1, \cdots, m$$

で X^k を更新する。

Step 2（列のスケーリング） $j = 1, \cdots, m$ に関して

$$\sigma_j^k = \frac{\beta_i}{\sum_i x_{i,j}^k}$$

を計算して

$$x_{i,j}^{k+1} \leftarrow x_{i,j}^k \sigma_j^k \ , \quad i = 1, \cdots, n \ , \ j = 1, \cdots, m$$

で X^{k+1} を定義する。

Step 3 スケール・ファクター ρ および σ の変化率が許容水準を満たしたら終了。さもなくば、$k \leftarrow k+1$

[5] Matrix Balancing 一般については、Schneider and Zenios (1990) “A Comparative Study of Algorithms for Matrix Balancing,” *Operations Research*,38 を参照。

としてStep 1に戻る。

３．KEO-RAS法

産業連関表から得られる$n \times m$投入比率行列Hと$n \times m$配分比率行列Rを次のように定義する。

$$H = X^0 \hat{a}^{-1} \tag{1}$$

$$R = {}^t X^0 \hat{b}^{-1} \tag{2}$$

図における$n \times 1$ ベクトル α および $m \times 1$ ベクトル β は国民経済計算ベースのコントロール・トータルスを示すものとしよう。ここでも、

$${}^t \alpha \iota = {}^t \beta \iota \tag{3}$$

が成立していなければならない。推計された表で計算される投入比率$x_{i,j} / \beta_j$と産業連関表で計算される投入比率$h_{i,j}$の加重残差二乗和および推計された表で計算される配分比率$x_{i,j} / \alpha_i$と行管産業連関表で計算される配分比率$r_{i,j}$の加重残差二乗和を同時に最小化するように$x_{i,j}$を決定することを考えよう。それは、次のような等号制約付き最小化問題で表現できる。

$$\min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \left[\frac{x_{k,l}}{\beta_l} - h_{k,l} \right]^2 \overline{w}_{i,j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \left[\frac{x_{k,l}}{\alpha_k} - r_{k,l} \right]^2 \tilde{w}_{i,j} \tag{4}$$

$$s.t. \quad \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} x_{i,l} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\beta_j = \sum_{j=1}^{m} x_{k,j} \quad (j = 1, \ldots, m)$$

ここで、$\overline{w}_{i,j}$と$\tilde{w}_{i,j}$は、G期におけるX^G, α^G, β^Gから得られる適当なウェイトである。KEO-RAS法とは、ウェイトを

$$\overline{w}_{i,j} = \frac{1}{h_{i,j}^2}$$

$$\tilde{w}_{i,j} = \frac{1}{r_{i,j}^2}$$

と定式化することによって、この最小化問題を解く方法である。即ち、$n \times 1$ ベクトル λ および $m \times 1$ ベクトル ζ をLagrange乗数ベクトルとすると、Lagrange乗数ψは、

$$\psi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \left[\frac{x_{k,l}}{h_{k,l} \beta_l} - 1 \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \left[\frac{x_{k,l}}{r_{k,l} \alpha_k} - 1 \right]^2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left[\alpha_k - \sum_{l=1}^{m} x_{k,l} \right] + \sum_{l=1}^{m-1} \zeta_l \left[\beta_l - \sum_{k=1}^{n} x_{k,l} \right] \tag{5}$$

となる。

最小化の必要条件より、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_{i,j}} = \frac{1}{h_{i,j}\beta_j}\left[\frac{x_{i,j}}{h_{i,j}\beta_j} - 1\right] + \frac{1}{r_{i,j}\alpha_i}\left[\frac{x_{i,j}}{r_{i,j}\alpha_i} - 1\right] + \lambda_i + \zeta_j = 0 \quad (i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m) \tag{6}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i} = \alpha_i - \sum_{l=1}^{m} x_{i,l} = 0 \quad (i = 1,\ldots,n) \tag{7}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta_j} = \beta_j - \sum_{k=1}^{n} x_{k,j} = 0 \quad (j = 1,\ldots,m) \tag{8}$$

(6)式を $x_{i,j}$ について解いて、

$$x_{i,j} = t_{i,j}s_{i,j} - \lambda_i s_{i,j} - \zeta_j s_{i,j} \quad (i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m) \tag{9}$$

ここで、

$$s_{i,j} = \frac{r_{i,j}^2\alpha_i^2 + h_{i,j}^2\beta_j^2}{r_{i,j}^2\alpha_i^2 h_{i,j}^2\beta_j^2} \quad (i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m)$$

$$t_{i,j} = \frac{1}{r_{i,j}\alpha_i} + \frac{1}{h_{i,j}\beta_j} \quad (i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m)$$

である。(9)式を(7)式と(8)式に代入して、

$$\sum_{l=1}^{m} s_{i,l}t_{i,l} - \lambda_i \sum_{l=1}^{m} s_{i,l} - \sum_{l=1}^{m} \zeta_l s_{i,l} = \alpha_i \quad (i = 1,\ldots,n) \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} s_{k,j}t_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_{k,j} - \zeta_j \sum_{k=1}^{n} s_{k,j} = \beta_j \quad (j = 1,\ldots,m) \tag{11}$$

を得る。これは、λ と ζ に関する $(n+m)$ 本の連立方程式体系である。しかし、(3)式より、このうち 1 本は一次従属であるから、一般性を失うことなく $\zeta_m = 0$ とすることができる。行列表示として、

$$\begin{bmatrix}
\sum_{l=1}^{m} s_{1,l} & & & & s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,m} \\
 & \sum_{l=1}^{m} s_{2,l} & & & s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,m} \\
 & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & \sum_{l=1}^{m} s_{n,l} & s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,m} \\
s_{1,1} & s_{2,1} & \cdots & s_{n,1} & \sum_{k=1}^{n} s_{k,1} & & & \\
s_{1,2} & s_{2,2} & \cdots & s_{n,2} & & \sum_{k=1}^{n} s_{k,2} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\
s_{1,m} & s_{2,m} & \cdots & s_{n,m} & & & & \sum_{k=1}^{n} s_{k,m}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \zeta_m
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum_{l=1}^{m} s_{1,l}t_{1,l} - \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{m} s_{n,l}t_{n,l} - \alpha_n \\ \sum_{k=1}^{n} s_{k,1}t_{k,1} - \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} s_{k,m}t_{k,m} - \beta_m
\end{bmatrix} \tag{12}$$

となる。先に述べたように体系の一次従属性より実際に解かれるのは最初の$(n+m-1)$本である。この体系を$(n+m-1)$本について解いた後に$\zeta_m = 0$として、(9)式に代入することによってXを求めることができる。

このように KEO-RAS 法は、通常の RAS 法と異なり推計上収束計算に頼ることがないので解の一意性が保証されている。また、ウェイト$\overline{w}_{i,j}$と$\tilde{w}_{i,j}$を

$$\overline{w}_{i,j} = 0 \quad (i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m)$$

$$\tilde{w}_{i,j} = \frac{\beta_j}{h_{i,j}} \quad (i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m)$$

とすることにより、解が RAS 法の近似解になることが示される。詳細は Kuroda(1988)[6]を参照されたい。

[6] Kuroda, M. (1988) "A method of estimation for updating transaction matrix in the input-output relationships," in Uno, K. and Shishido, S. eds., *Statistical Data Bank Systems, Socio-Economic Database and Model Building in Japan*, ch.2,